高等代数
专题研究选编

GAODENG DAISHU
ZHUANTI YANJIU XUANBIAN

张小红 蔡秉衡 等编

陕西科学技术出版社

封面设计　杨文涛
责任编辑　王　军

ISBN 7-5369-1347-8/G·210
定价：6.50元

高等代数专题研究选编

主　编　张小红　蔡秉衡

副主编　岳振才　宋子伦
　　　　任耀文　包桐桢

陕西科学技术出版社

主　编　张小红　蔡秉衡
副主编　岳振才　宋子伦　任耀文　包桐桢
编　委　刘用麟　陈昌南　陈　琳　徐德余
杜生辉　张炳森　张秦岭　郭金保
邹庭荣　孙　静　章秋明

高等代数专题研究选编
张小红　蔡秉衡　等编
陕西科学技术出版社出版发行
（西安北大街131号）
新华书店经销　　汉中第二印刷厂印刷
787×1092毫米　32开本　12.25印张　26万字
1992年11月第1版　1992年11月第1次印刷
印数：1-3000
ISBN 7—5369—1347—8/G·210
定　价：6.50元

前　言

高等代数是大学数学专业的主要基础课，作为其中核心分的线性代数，是理工科大学各专业的重要数学工具。因此，牢固掌握和深入理解其中的思想方法和技巧，对于大学生是非常重要的。为帮助大学生学好这门重要课程，我们从教学实际出发，精选了近年国内高等代数研究的新成果，经加工整理编成此书。其主要内容是对高等代数中重点、难点问题，进行深入剖析，提供简捷、有效、实用的新方法新技这些内容有助于读者开阔思路，活跃思想，提高分析问题和解决问题的能力，进而培养和提高其数学创造力。此书可供读者学习高等代数或线性代数时参考，亦可作为大学选修课教材使用，也宜作为范本指导大学生撰写论文。

本书选编的众多资料，大都征得原作者的同意，在此谨作说明。书后附有所有原始材料的目录，对这些材料的作者们给予的真诚合作表示感谢！本书列出的编委是参加编写工作的主要人员；另外，许多同行前辈对本书的编写、出版给予了真挚的帮助，特别是北京师范大学吴品三教授、陕西师范大学雷天德教授、清华大学李文汉副教授、曲阜师大方朝教授、西北大学孟杰副教授、汉中师院蒲义书教授和谢力教授、徐州师范学院章仲英教授、湖南师范大学张长明教授、吉安师专肖祖文教授、汉中教育学院李印堂副教授，以及西北师大杨永保先生、四川师大彭玖麒先生、泰安师专张

纯伯先生、湖州师专凌瑞官先生、汉中师院白永成先生及付银汉、周亚兰女士，对于他们，我们全体编者表示衷心感谢！更希望得到读者的批评指正！

编　者

1992.2.23.

目　录

一、矩阵在多项式理论中的应用

利用矩阵理论研究多项式的有关问题，不仅方法新颖，而且简捷明了，易于掌握，有一定的适用性。

1．多项式整除的矩阵判定

我们首先讨论多项式乘积的矩阵表示。

设$F[x]$表示数域F上的一元多项式环。$\forall f(x)$，$g(x)\in F[x]$，且

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，$(a_n\neq 0)$，$n$为非负整数。

$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m$，$(b_m\neq 0)$，$m$为非负整数。则由通常多项式的乘法可知

$f(x)g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n+m}x^{n+m}$，

其中

$c_k=a_kb_0+a_{k-1}b_1+a_{k-2}b_2+\cdots+a_0b_k$，$k=0,1,2,\cdots,n+m$。（1）

相对于给定的如上$f(x)$和$g(x)$，分别作矩阵

$$A_f=\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_1 & a_1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \vdots & a_0 \\ 0 & a_n & \vdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_n \end{pmatrix}_{(n+m+1)\times(m+1)};$$

$$X_g = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{(m+1)\times 1},$$

其中，$n=$次〔$f(x)$〕，$m=$次〔$g(x)$〕。

显然，上述形式的矩阵由给定的$f(x)$和$g(x)$所唯一确定。因此我们有

定义1 上述形式的矩阵A_f称为多项式$f(x)$（相对于$g(x)$作乘积时）的系数矩阵，X_g称为多项式$g(x)$的系数列矩阵。

定理1 1)矩阵之积$A\ X_g$等于由多项式之积$f(x)g(x)$所确定的系数列矩阵

$$X_{fg} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{pmatrix}$$

其中c_k（$k=0,1,2\cdots,n+m$）满足（1）式。

2) $f(x)g(x)$是唯一确定的。

证明 1)事实上

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \vdots & a_0 \\ 0 & a_n & \vdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_0b_0 \\ a_1b_0+a_0b_1 \\ \vdots \\ a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k \\ \vdots \\ a_nb_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{pmatrix}$$

即有$A_fX_g=X_{fg}$。

2） 由于A_f，X_g均唯一，从而X_{fg}唯一，即$f(x)g(x)$是唯一的。

顺便指出，若取X_f为$f(x)$的系数列矩阵（是$(n+1)\times 1$的），则$g(x)$的系数矩阵A_g是$(m+n+1)\times(n+1)$的，此时

$$A_gX_f=X_{gf}=X_{fg}.$$

在具体计算时，只要注意到A_f的列数等于X_g的行数（也等于$g(x)$的次数$+1$）这一点，则写出A_f也是容易的。

例 1 设$f(x)=-3+4x-4x^2-2x^3+x^4$，$g(x)=3-4x-5x^2+2x^3$。求$f(x)g(x)$。

解 由于次$(f(x))=4$，次$(g(x))=3$，故A_f是$(4+3+1)\times(3+1)$矩阵，X_g是$(3+1)\times 1$矩阵，即取

$$A_f=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad X_g=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}，则$$

$$A_f X_g = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 24 \\ -13 \\ -16 \\ 39 \\ -2 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} = X_{fg},$$

于是由X_{fg}即得

$$f(x)g(x) = -9 + 24x - 13x^2 - 16x^3 + 39x^4 - 2x^5 - 9x^6 + 2x^7.$$

下面讨论多项式整除的矩阵表示。

设$h(x)$，$f(x) \in F[x]$，有

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_px^p，\ (c_p \neq 0)，$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n，\ (a_n \neq 0)。$$

其中p，n为非负整数，且假定$p \geq n$。

由于$p \geq n$，则总有非负整数m，使$p = n + m$，故

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}。$$

取$f(x)$的系数矩阵A_f和$h(x)$的系数列矩阵X_h分别是

$$A_f = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \vdots & a_0 \\ 0 & a_n & \vdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_n \end{pmatrix}_{(n+m+1)\times(m+1)},$$

$$X_h=\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{pmatrix}_{(n+m+1)\times 1},$$

其中$n+m=p$。

令矩阵

$$\overline{A}=(A_f,\ X_h),$$

则我们有

定理 2 1）$f(x)\mid h(x)$的充要条件是秩（$\overline{A}$）= 秩（A_f）$=m+1$。

2）若有$g(x)\in F[x]$，使$h(x)=f(x)g(x)$，则$g(x)$唯一。

证明 1）由于$n+m+1\geq m+1$，且只要$f(x)\neq 0$，恒有秩（A_f）$=m+1$是显然的。

设列矩阵

$$X_g=\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{(m+1)\times 1}, \qquad \text{其中} m=p-n。$$

令

$$A_f X_g=X_h, \tag{2}$$

则(2)式是关于以b_0，b_1，…，b_m为未知量的一个线性方程组，A_f是(2)的系数矩阵，$\overline{A}$是增广矩阵，所以（2）有解

当且仅当秩（A_f）= 秩（$\overline{A}$）。

而（2）有解（即存在X_g使$A_f X_g = X_h$）当且仅当$f(x) \mid h(x)$（即存在$g(x) \in F[x]$，使$f(x)g(x) = h(x)$，将X_g看作$g(x)$的系数列矩阵）。所以

$$f(x) \mid h(x) \text{当且仅当秩}(A_f) = \text{秩}(\overline{A}) = m+1.$$

2) 由于(2)有$m+1$个未知量b_0，b_1，…，b_m，而秩(A_f) = 秩$(\overline{A}) = m+1$。故(2)有唯一解X_g，所以$f(x)g(x) = h(x)$中的$g(x)$是唯一确定的。

例 2　设$h(x) = 2 + 3x - 13x^2 - 6x^3 + 17x^4 - 3x^5$，

$$f(x) = 2 - x - 5x^2 + x^3。$$

判定$f(x)$能否整除$h(x)$，若整除时，求$g(x)$，使

$$h(x) = f(x)g(x)。$$

解　因为次（$h(x)$）= 5，次（$f(x)$）= 3，所以取定理中的$n = 3$，$m = 5 - 3 = 2$，故可令

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(3+2+1)\times(2+1)},$$

$$X_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -13 \\ -6 \\ 17 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = (A_f, X_h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ -5 & -1 & 2 & -13 \\ 1 & -5 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

对$\overline{A}$施行初等行变换化为

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

则易见秩(A_f)=秩($\overline{A}$)=3，从而$f(x)\mid h(x)$。

由于$m=2$，故令

$$X_g=\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{pmatrix}_{(2+1)\times 1},$$ 并由$A_fX_g=X_h$与

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

两解得

$$X_g=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},$$ 取$g(x)=1+2x-3x^2$，即有

$h(x)=f(x)g(x)$。

对于含有参变数作系数的多项式整除的判定，定理2具有独特的效果。

例3 设$h(x)=q+px+x^4$，$f(x)=1+mx+x^2$，求$f(x)$整除$h(x)$所满足的条件。

解 令

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} q & 1 & 0 & 0 \\ p & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}，$$ 对$\overline{A}$进行初等行变换化为

$$\begin{pmatrix} q & 1 & 0 & 0 \\ -m & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ p-mq+m & 0 & 0 & 0 \\ -q-1+m^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由定理2知，$f(x)|h(x)\Longleftrightarrow$秩$(\overline{A})=4-2+1=3\Longleftrightarrow p-mq+m=0$且$-q-1+m^2=0$，即 $p=m^3-2m$且$q=m^2-1$。

2．最大公因式的矩阵求法

设$f(x)$，$g(x)\in F[x]$，$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式，则有$u(x)$，$v(x)\in F[x]$，使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x) \tag{1}$$

成立。在一般现行《高等代数》教材中，采用辗转相除法求得$d(x)$后，再利用逐步代入的方法求得$u(x)$，$v(x)$使（1）

式成立。这样做，在$f(x)$，$g(x)$作辗转相除次数较多时显得十分麻烦。尤其是为求得满足（1）式的$u(x)$与$v(x)$时，在辗转相除的过程中不能用常数去乘除式和被除式，这就增加了运算的困难。下面我们介绍一种利用矩阵的初等变换同时求得$d(x)$，$u(x)$，$v(x)$使（1）式成立的方法。

为叙述方便，称一个以$F[x]$中的多项式为元素的矩阵为x－矩阵；称以下三种变换为x－矩阵的初等行变换：

1）矩阵的某两行互换位置；

2）矩阵的某一行乘以一个非零常数；

3）矩阵的某一行的$\varphi(x)$倍加到另一行，$\varphi(x)\in F[x]$。

命题1 任意一个x－矩阵经初等行变换后必可化为如下形式

$$\begin{pmatrix} d(x) & ※ & \cdots & ※ \\ 0 & ※ & \cdots & ※ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & ※ & \cdots & ※ \end{pmatrix},$$

其中“※”表示$F[x]$中的多项式。

证明从略。

命题2 设x－矩阵

$$A(x)=\begin{pmatrix} f(x) & 1 & 0 \\ g(x) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 经初等行变换化为 $B(x)=$

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & u_1(x) & v_1(x) \\ g_1(x) & s_1(x) & t_1(x) \end{pmatrix},$$

那么 $(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$，且

$$f_1(x) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x),$$

$$g_1(x) = s_1(x)f(x) + t_1(x)g(x)。$$

证明 只需证明经一次初等行变换后上述命题成立即可。下面分别就三种初等变换加以证明。

1) $B(x)$是经$A(x)$互换两行得到的，则$f_1(x) = g(x)$，$g_1(x) = f(x)$，$u_1(x) = t_1(x) = 0$，$v_1(x) = s_1(x) = 1$，易见命题成立；

2) 不妨设$B(x)$是以非零数c乘$A(x)$的第一行得到的，则$f_1(x) = cf(x)$，$g_1(x) = g(x)$，$u_1(x) = c$，$t_1(x) = 1$，$v_1(x) = s_1(x) = 0$，由于$(f(x), g(x)) = (cf(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$，且$f_1(x) = cf(x) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x)$，$g_1(x) = g(x) = s_1(x)f(x) + t_1(x)g(x)$。从而命题成立；

3) 设$B(x)$是由$A(x)$的第二行的$q(x)$倍加到第一行得到的，那么，

$f_1(x) = f(x) + q(x)g(x)$，$g_1(x) = g(x)$，$u_1(x) = t_1(x) = 1$，$v_1(x) = q(x)$，$s_1(x) = 0$，于是$(f(x), g(x)) = (f_1(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$。且由

$$f(x) = 1 \cdot f(x) + 0 \cdot g(x), \quad (2)$$

$$g(x) = 0 \cdot f(x) + 1 \cdot g(x), \quad (3)$$

(3)乘以$q(x)$加到(2)得

$$f_1(x) = f(x) + q(x)g(x) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x),$$

$$g_1(x) = g(x) = s_1(x)f(x) + t_1(x)g(x),$$

综上述，命题2成立。

由命题1及命题2即得

定理 1 设x－矩阵

$$A(x)=\begin{pmatrix} f(x) & 1 & 0 \\ g(x) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 经初等行变换化为$B(x)=$

$$\begin{pmatrix} d(x) & u(x) & v(x) \\ 0 & s(x) & t(x) \end{pmatrix},$$

则$d(x)=$为$f(x)$，$g(x)$的最大公因式，且满足

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)。$$

例 1 设$f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$，$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$，求$(f(x),\ g(x))$及$u(x)$，$v(x)$使

$$(f(x),\ g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)。$$

解 作矩阵

$$\begin{pmatrix} x^4+2x^3-x^2-4x-2 & 1 & 0 \\ x^4+x^3-x^2-2x-2 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

对该矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} x^4+2x^3-x^2-4x-2 & 1 & 0 \\ x^4+x^3-x^2-2x-2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)}$$

$$\begin{pmatrix} x^3-2x^2 & 1 & -1 \\ x^4+x^3-x^2-2x-2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-x(1)}$$

$$\begin{pmatrix} x^3-2x & 1 & -1 \\ x^3+x^2-2x-2 & -x & 1+x \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)}$$

$$\begin{pmatrix} x^3-2x & 1 & -1 \\ x^2-2 & -x-1 & x+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{再互换(1)(2)}]{(1)-x(2)}$$

$$\begin{pmatrix} x^2-2 & -x-1 & x+2 \\ 0 & 1+x+x^2 & -(1+x)^2 \end{pmatrix}。$$

于是，$(f(x),\ g(x))=x^2-2$，$u(x)=-x-1$，$v(x)=x+2$ 满足 $x^2-2=(-x-1)f(x)+(x+2)g(x)$。

定理 2 设 x－矩阵

$$A(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ f_2(x) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x) & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

经初等行变换必可化为

$$B(x)=\begin{pmatrix} d(x) & u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_n(x) \\ 0 & ※ & ※ & \cdots & ※ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & ※ & ※ & \cdots & ※ \end{pmatrix},$$

且 $d(x)$ 是 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$ 的最大公因式，满足

$$d(x)=u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_n(x)f_n(x)。$$

其中，$B(x)$ 中的“※”表示 $F\,[x]$ 中的多项式。

本定理容易用数学归纳法证得。

例 2 设 $f_1(x)=x^3-2x^2-x+2$，$f_2(x)=x^3-4x^2+x+6$，$f_3(x)=x^4-4x^3+2x^2+4x-3$。求 $((f_1(x),\ f_2(x)),\ f_3(x))$ 及 $u_1(x)$，$u_2(x)$，$u_3(x)$ 使

$(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = u_1(x)f_1(x) + u_2(x)f(x) + u_3(x)f_3(x)$。

解 对下述矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} x^3-2x^2-x+2 & 1 & 0 & 0 \\ x^3-4x^2+x+6 & 0 & 1 & 0 \\ x^4-4x^3+2x^2+4x-3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} x+1 & \frac{1}{2} & x-\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & (x-1)^2 & -x+2 \\ 0 & 3-x & -2x^2+7x-5 & 2x-4 \end{pmatrix}.$$

于是，$(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = x+1$，$u_1(x)=\frac{1}{2}$，$u_2(x)=x-\frac{1}{2}$，$u_3(x)=-1$，满足

$$x+1=\frac{1}{2}f_1(x)+\left(x-\frac{1}{2}\right)f_2(x)-f_3(x)。$$

上述方法，在整数环上也适用。

例3 求4，10，36的最大公因数及三个整数u_1，u_2，u_3，使$4u_1+10u_2+36u_3=(4, 10, 36)$。

解 作矩阵A并对A进行初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 1 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & 5 & -2 & 0\\2 & -2 & 1 & 0\\0 & -9 & 0 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 0\\0 & 5 & -2 & 0\\0 & -9 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则$(4, 10, 36)=2$，$u_1=-2$，$u_2=1$，$u_3=0$，且

$$2=(4, 10, 36)=(-2)\times 4+1\times 10+0\times 36。$$

顺便指出的是，上述命题及定理中所涉及到的矩阵全部予以转置，并将相应的行变换改为列变换，其结论也完全成立。详见《数学通报》1989年第2期包桐桢的文章。

二、关于Eisensrein判别法的研究

有理系数多项式在有理数范围内是否可约的问题可以归结到整系数多项式在整数范围内是否可约的问题。关于整系数多项式在有理数范围内是否可约的问题，有一充分的判断条件，这就是Eisenstein判别法：

设$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$是一整系数多项式，若是能够找到一个素数$p$，使

1） $p\nmid a_n$；

2） $p\mid a_i$，$i=0,1,\cdots,n-1$；

3） $p^2\nmid a_0$，

则多项式$f(x)$在有理数域上不可约。

1．施行变换仍有局限性

众所周知，Eisenstein判别法不是对所有的情况都有效的，也就是说只是不可约的充分条件而不是必要条件。但是，关于整系数多项式可约问题，有如下结论

引理1 设$f(x)$是一整系数多项式，m为整数，则$f(x)$在有理数域上可约的充要条件是$g(y)=f(y+m)$在有理数域上可约。

有了这个结论，对一些不能直接应用Eisenstein判别法的例子，通过适当的变换后，可用Eisenstein判别法来判断其可约性。例如，多项式$f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$

（其中p为素数），虽然不能直接应用Eisenstein判别法，但若令$x=y+1$，则$g(y)=f(y+1)$可用Eisenstein判别法来判断，且知$f(x)$在有理数域上不可约。

于是有一问题，如果整系多项式$f(x)$在有理数域上不可约，那么是否定能找到一个整数b和一个素数p，使得$g(y)=f(y+b)$满足Eisenstein判别法的条件？回答是否定的！

例1 $f(x)=x^2+2x+5$，易知它在有理数域上不可约，证明无论使用何种变换$x=y+b$都不能用Eisenstein判别法来断定它为不可约。

证明 假定对$f(x)$存在这样的整数b和素数p，那末对于$g(y)=f(y+b)=y^2+2(b+1)y+b^2+2b+5$。

$$p \mid 2(b+1), \quad ①$$

$$p \mid (b^2+2b+5), \quad ②$$

$$p^2 \nmid (b^2+2b+5), \quad ③$$

若p是绝对值不小于3的素数，那么由①可知$p \mid (b+1)$。再由②，知存在整数r和s使得

$$\begin{cases} b^2+2b+5=pr, \\ b+1=pr. \end{cases}$$

由此得

$$r-ps^2=\frac{4}{p}, \quad ④$$

④式左端是一整数，右端恒不为整数，矛盾！若$p=\pm 2$，则由②知b为奇数。设$b=2n+1$，那么$b^2+2b+5=4(n^2+2n+2)$，于是$p^2 \mid (b^2+2b+5)$，又与③矛

盾！因此，对于$f(x)=x^2+2x+5$，前述的整数b和素数p是不存在的。

问题到此并没有结束。事实上，在上述的$f(x)$中若令$x=2y+1$，则$f(x)=f(2y+1)=4(y^2+2y+2)$由Eisenstein判别法就能断定$\varnothing(y)=y^2+2y+2$在有理数域上是不可约的，从而$f(x)=4\varnothing(y)$在有理数域上也是不可约的。由此使我们认识到，为充分利用Eisenstein判别法的功能，对x的一次和二次以上的变换有研究的必要。

这样，自然产生如下问题：是否对任何有理数域上不可约的整系数多项式

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,

恒存在一种变换，$x=\varphi(y)=b_my^m+b_{m-1}y^{m-1}+\cdots+b_1y+b_0$使$g(y)=f(\varphi(y))=c\psi(y)=c(c_{nm}y^{nm}+\cdots+c_0)$。（其中$b_i$和$c$均为有理数，$i=1,2,\cdots,m$；$c_0,\cdots,c_{nm}$为整数）恒存在一个质数$p$，$p\nmid c_{nm}$，$p|c_0$，$c_1$，$\cdots$，$c_{nm-1}$，但$p^2\nmid c_0$，由Eisenstein判别法知$\psi(y)$是不可约的，从而$g(y)$及$f(x)$均是不可约的。

对上述问题有如下完满的回答：

当$n=2$时，结论成立；

当$n>2$时，结论不成立。

定理1　二次不可约多项式恒可通过x的一次变换，使其适合Eisenstein判别法判定。

证明$f(x)=ax^2+bx+c$

$$=\frac{1}{4a}[(2ax)^2+4abx+b^2-b^2+4ac]$$

$$=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)],$$

令$y=2ax+b$，$d=4ac-b^2$，那么$f(x)=\frac{1}{4a}(y^2+d)$。

因此，只要证明，如果$f(x)=x^2+d$不可约，$f(x)$恒可通过x的一次变换，使其适合Eisenstein判别法判定。

因为$f(x)$不可约，当$d<0$时，d一定不是一个完全平方数，令

$d=-p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$

是d的典型分解式，其中α_i至少有一个是奇数，不妨令$\alpha_1=2n+1$，作变换$x=p_1^n y$，则$f(x)=p_1^{2n}(y^2-p_1p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t})$。显然$f(x)$可用Eisenstein判别法判定。若$d>0$，当$\alpha_i$中有一个是奇数，仿上同法可证$f(x)$可用Eisenstein判别法判定；当$\alpha_i$全是偶数，令$x=p_1^{\frac{\alpha_1}{2}}p_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\cdots p_t^{\frac{\alpha_t}{2}}y$，那么$f(x)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}(y^2+1)$，作变换$y=z-1$，那么$f(x)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}(z^2-2z+2)$，$f(x)$显然可用Eisenstein判别法判定，因此定理1成立。

反例　$f(x)=x^3+12x+4$显然在有理数域上是不可约的，下面将证明无论用什么多项式变换都不可能使$f(x)$满足Eisenstein判别法的条件。

令$x=g(y)=b_my^m+b_{m-1}y^{m-1}+\cdots+b_1y+b_0$。其中$b_i$是有理数，$b_m\neq0$，那么$g(y)$可以写成一个有理数与一个本原多项式的乘积。

$$x=g(y)=\frac{s}{r}(a_my^m+a_{m-1}y^{m-1}+\cdots+a_1y+a_0),$$

$(s,r)=1$。

$$f(x)=\frac{s^3}{r^3}(a_my^m+a_{m-1}y^{m-1}+\cdots+a_1y+a_0)^3+$$

$$12 \cdot \frac{s}{r}\ a_m y^m + a_{m-1} y^{m-1} + \cdots + a_1 y + a_0) + 4 = \frac{1}{r^3}$$

$$\left[s^3 (a_m y^m + a_{m-1} y^{m-1} + \cdots + a_1 y + a_0)^3 + 12 r^2 s \right.$$

$$\left. (a_m y^m + a_{m-1} y^{m-1} + \cdots + a^1 y + a_0) + 4 r^3 \right]$$

$$= \frac{1}{r^3}\Big[s^3 \cdot \sum_{\lambda_m + \cdots + \lambda_0 = 3} \frac{3\,!}{\lambda_m!\,\lambda_{m-1}!\cdots\lambda_0!}$$

$$(a_m y^m)^{\lambda m} \cdots (a_1 y)^{\lambda_1} a_0^{\lambda_0} + (12 r^2 \cdot a_m y^m + \cdots + 12 r^2 s a_0)$$

$$+ 4r^3 \Big] = \frac{1}{r^3}\Big(s^3 a_m^3 y^{3m} + 3 s^2 a_m^2 a^{m-1} y^{3m-1} +$$

$$\left(3 s^3 a_m^2 a_{m-2} + 3 s^3 a_m a_{m-1}^2 \right) y^{3m-2} + \left(3 s^3 a_m^2 a_{m-3} + \right.$$

$$\left. 6 s^3 a_m a_{m-1} a_{m-2} + s^3 a_{m-1}^3 \right) y^{m3-3} + \left(3 s^3 a_m^2 a_{m-4} + \right.$$

$$\left. 6 s^3 a_m a_{m-1} a_{m-3} + 3 s^3 a_m a_{m-2}^2 + 3 s^3 a_{m-1}^2 a_{m-2} \right) y^{3m-4}$$

$$+ \cdots + (3 s^3 a_m^2 a_0 + 6 s^3 a_m a_{m-1} a_1 + 6 s^3 a_m a_{m-2} a_2 + \cdots$$

$$+ 3 s^3 a_{m-1}^2 a_2 + 6 s^3 a_{m-1} a_{m-2} a_3 + \cdots) y^{2m} + \cdots +$$

$$(s^3 a_0^3 + 12 r^2 s a_0 + 4 r^3) \Big)。$$

若存在素数p满足

（1） $p \nmid s^3 a_m^3$

（2） $p|3a^3a_m^2a_{m-1}$,

（3） $p|3s^3a_m^2a_{m-2}+3s^3a_ma_{m-1}^2$,

（4） $p|3s^3a_m^2a_{m-3}+6s^3a_ma_{m-1}a_{m-2}+s^3a_{m-1}^3$,

（5） $p|3s^3a_m^2a_{m-4}+6s^3a_ma_{m-2}a_{m-3}+3s^3a_ma_{m-2}+$

$3s^3a_{m-1}^2a_{m-2}$,

…… ……

（$m+1$）

$$p|3s^3a_m^2a_0+6s^3a_ma_{m-1}a_1+6s^3a_ma_{m-2}a_0+\cdots$$

$+3s^3a_{m-1}^2a_2+6s^3a_{m-1}a_{m-2}a_3+\cdots$

……

$p|s^3a_0^3+12r^2sa_0+4r^3$,

$p^2\nmid s^3a^3{}_0+12r^2sa_0+4r^3$。

则由（1），（2）两式可得$p|3$或$p|a_{m-1}$，对$p|3$，则$p=3$，由$3|s^3a_0^3+12r^2sa_0+4r^3$得$s^3a_0^3+12r^2sa_0+4r^3\equiv0$（$mod3$），于是$sa_0+r\equiv0$（$mod3$），令$sa_0+r=3n$，那么$sa_0=3n-r$，$s^3a_0^3+12sr^2a_0+4r^3=(3n-r)^3+12r^2(3n-r)+4r^3=27n^3-27n^2r+45nr^2-9r^3$，于是$3^2|s^3a^3+12sr^2a_0+4r^3$，矛盾！对$p|a_{m-1}$，由（3），$p|a_{m-2}$；由（4），$p|a_{m-3}$；由（5），$p|a_{m-4}$，…，由（$m+1$），$p|a_0$，因为$p|s^3a_0^3+12r^2sa_0+4r^3$，所以$p|4$或$p|r$，容易验证无论哪种情况都有$p^2|s^3a_0^3+12r^2sa_0+4r^3$，矛盾！

综上所述$f(x)=x^3+12x+4$无论用什么多项式变换，都不能使其满足*Eisesnstein*判别法的条件。

一般地可以证明

结论1　凡$f(x)=x^q+x+c$（q是奇质数）中的不可约多项式，都不可能经x的整系数多项式变换使其适合*Eisenstein*判别法判定。

更进一步有

结论2　在有理数域上，存在着任意次（>2）的不可约多项式$f(x)$，使得对于任何次数（≥ 1）的有理系数多项式$g(x)$及$f(g(x))=\frac{s}{r}f_1(x)$，$f_1(x)$不能应用*Eisenstein*判别法，这里$r$，$s$为互素整数，$f_1(x)$为整系数多项式。

以上两结论的证明都较繁，此不赘述，有兴趣的读者可分别参见《数学通报》90年2期郑格于的文章"*Eisenstein*判别法的应用（2）"及《聊城师院学报》（自）91年3期张鸿图的文章"'*Eisenstein*判别法的应用（2）"一文的注记"。

上面我们进一步认识了*Eisenstein*判别法的局限性。尽管如此，寻找*Eisenstein*判别法的推广，仍具有重要意义，这就是下面讨论的第二个问题。

2．Eisenstein判别法的进一步推广

下面是对*Eisenstein*判别法的系列推广，这些新判别法仍是整系数多项式不可约的充分条件而不是必要条件，尽管它们可以用来判断更多的整系数多项式的不可约性。

定理 2 设$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$是一个整系数多项式，若$f(x)$没有有理根，并能找到一个素数$p$，使得

1） p至少不整除a_n，a_{n-1} 中的一个；

2） $p \nmid a_i$，$i=0$，1，2，…，$n-2$；

3） $p^2 \nmid a_0$，

那么$f(x)$在有理数域上不可约。

证明 若$f(x)$在有理数域上可约，则显然多项式$f(x)$可分解成两个次数都低于$f(x)$的次数n的整系数多项式的乘积

$$f(x)=g(x)h(x),$$

这里$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_kx^k$，$h(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_lx^l$，从而$a_0=b_0c_0$。

因$f(x)$无有理根，而由假设$f(x)$可约知，$\min$（次（$g(x)$），次（$h(x)$））≥ 2，所以次（$f(x)$）≥ 4，$k,l<n-1$。

因$p|b_0c_0$，$p^2 \nmid b_0c_0$，故p只能整除b_0，c_0中一个。设$p|b_0$，$p \nmid c_0$，则p不能整除$g(x)$的所有系数，否则$p|a_n$，a_{n-1}，与已知矛盾！

设b_s是$g(x)$中第一个不能被p整除的系数，考察$a_s=b_sc_0+b_{s-1}c_1+\cdots+b_0c_s$，因$k$，$l<n-1$，$s<n-1$，从而$p|a_s$、$b_{s-1}$，所以$s<n-1$，这样$p|a_s$，$b_{s-1}$，$b_{s-2}$，…，$b_0$。故$p|b_sc_0$，说明$p|b_s$或$p|c_0$，矛盾！命题得证。

定理 3 设$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$是一个整系数多项式，若$f(x)$无有理根且能找到一个素数p，使得

1） p至少不整除a_0，a_1中一个；

2） $p|a_i$，$i=2$，3，…，n；

3） $p^2 \nmid a_n$，

那么$f(x)$在有理数域上不可约。

利用定理2及下面证明的定理4即可得上述定理3。

定理4 数域F上的多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

与

$$\overline{f}(x)=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+a_0x^n$$

在数域F上同时可约或不可约。

证明 只须证明$f(x)$可约时$\overline{f}(x)$也可约。类似地可证明$\overline{f}(x)$可约时$f(x)$也可约。

若$f(x)$可约，则

$$f(x)=g(x)h(x),\ g(x),\ h(x)\in F[x]$$

其中$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_kx^k$，$h(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_lx^l$，$k+l=n$，令$\overline{g}(x)=b_k+b_{k-1}x+\cdots+b_0x^k$，$\overline{h}(x)=c_l+c_{l-1}x+\cdots+c_0x^l$，则显然$\overline{g}(x)$，$\overline{h}(x)\in F[x]$，且$\overline{g}(x)\cdot\overline{h}(x)$的$m$次项系数为

$$\sum_{i+j=m} b_{k-j}c_{l-i}=\sum_{i'+j'=n-m} b_{i'}c_{j'},\quad i'=k-j,\ j'=l-i$$

此即为$f(x)$的$n-m$次项系数，即$\overline{f}(x)$的m次项系数，从而由m的任意性得$\overline{f}(x)=\overline{g}(x)\overline{h}(x)$，这说明$\overline{f}(x)$可约。

证毕！

显然定理2比Eisenstein判别法广，用Eisenstein

判别法能判定的，用定理2都能判定，而能用定理2、定理3判定的，用$Eisenstein$判别法不一定能判定。

例1 $f(x)=3x^5+7x^4+3x^2+3x+3$。

首项系数的因数为±1，±3，常数项因数为±1，±3，故可能的一切根为±1，$\pm\frac{1}{3}$，±3，易验算都不是其根。又存在素数$p=3$使

1） $p\nmid 7$

2） $p\mid 3$

3） $p^2\nmid 3$，

于是满足定理2的条件，故$f(x)$不可约。

但是，直接用$Eisenstein$判别法不能判定。

例2 $f(x)=3x^5+3x^4+3x^2+7x+1$。

$f(x)$的一切可能有理根为±1，$\pm\frac{1}{3}$，验证都不是其根，故无有理根。又存在素数$p=3$，使

1） $p\nmid 1$，$p\nmid 7$

2） $p\mid 3$

3） $p^2\nmid 3$，

于是满足定理3的条件，故$f(x)$不可约。

但直接用$Eisenstein$判别法不能判定。

定理2仍可进一步推广。

定理5 若整系数多项式

$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ （$n\geq6$）

没有有理根，也没有整系数二次因式，并能找到素数p使得

1） p至少不整除a_n、a_{n-1}、a_{n-2}中的一个；

2）$p|a_i$，$i=0$，1，2，…，$n-3$；

3）$p^2 \nmid a_0$

则$f(x)$在有理数域上不可约。

证明 若$f(x)$在有理数域上可约，则$f(x)$可以分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积，即

$$f(x)=g(x)h(x),$$

这里$g(x)=b_0+\cdots+b_kx^k$，$h(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_lx^l$，且$k<n$，$l<n$，$k+l=n$，$a_0=b_0c_0$。（自然应有$k\geq 3$，$l\geq 3$）。

由2）、3）知，b_0与c_0中有且只有一个被p整除，无妨设$p|b_0$但$p\nmid c_0$，显然p不能整除$g(x)$的所有系数，否则$p|a_n$、a_{n-1}、a_{n-2}，这与1）矛盾！故令$g(x)$中第一个不能被p整除的系数为b_s。考察等式

$$a_s=b_sc_0+b_{s-1}c_1+\cdots+b_0c_s,\quad s\leq k\leq n-3,$$

易得$p|b_sc_0$（因由2）$p|a_s$），从而$p|b_s$或$p|c_0$，矛盾！所以$f(x)$在有理数域上不可约。

利用定理4、5又有

定理6 若整系数多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \qquad (n\geq 6)$$

没有有理根也没有整系数二次因式，且能找到素数p使得

1）p至少不整除a_0、a_1、a_2中的一个；

2）$p|a_i$，$i=3$，4，…，n；

3）$p^2\nmid a_n$。

那么$f(x)$在有理数域上不可约。

还可将定理5引伸为

定理7 若整系数多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

没有有理根也没有整系数2、3、…、k次（$k<[\frac{n}{2}]$）因式，且能找到素数p使得

1）p至少不整除a_n，$a_{n-1}\cdots$，a_{n-k}中的一个；

2）$p|a_i$，$i=0，1，2，\cdots，n-(k+1)$；

3）$p^2\nmid a_0$。

则$f(x)$在有理数域上不可约。

定理7的证明类似定理5的证明，此不赘述。

例3 试证$f(x)=x^6-3x^5-5x^4+2x^3+2x^2+2x+2$在有理数域上不可约。

此例由于满足$p|a_0$，$p^2\nmid a_0$的素数p只能是2，而$2\nmid a_5$，$2\nmid a_4$，所以用Eisenstein方法及定理2，3给出的方法都无法判断，但用定理5的方法可判断$f(x)$不可约。

证明 易得$f(0)=2$，$f(1)=1$，$f(-1)=-1$，$f(2)=-82$，$f(-2)=70$，故$f(x)$没有有理根；

下证$f(x)$没有二次因式。

假设$f(x)$有二次因式$g(x)$，无妨设$g(x)=x^2+bx+c$（b、c为整数），我们用Kronecker方法考查$g(x)$是否整除$f(x)$。

首先，$g(0)|f(0)$，$g(1)|f(1)$，$g(-1)|f(-1)$，即$c|2$，$(1+b+c)|1$，$(1-b+c)|(-1)$

分下列情况进行讨论：

①若$c=1$，

此时有$(2+b)|1$，$(2-b)|(-1)$，由$(2+b)|1$可

得$b=-1$或-3，但$b=-1$、-3时$(2-b)$都不整除-1，故这种情形不存在！

②若$c=-1$，

可得$b|1$，从而有两种可能，或$b=1$或$b=-1$，即此时$g(x)=g_1(x)=x^2+x-1$或$g(x)=g_2(x)=x^2-x-1$，

③若$c=2$，

此时有$(3+b)|1$，$(3-b)|(-1)$，由$(3+b)|1$可得$b=-2$或-4，但$b=-2$、-4时，$(3-b)\nmid(-1)$故这种情形亦不可能发生！

④若$c=-2$，

可得$(b-1)|1$，$(b+1)|1$，由$(b-1)|1$可得$b=2$或0，但$b=2$时$(b+1)\nmid 1$。故只可能有$b=0$，此时$g(x)=g_3(x)=x^2-2$。

由于$g_1(2)=5$，故$g_1(2)\nmid f(2)$，所以$g_1(x)\nmid f(x)$。另外，直接计算知$g_2(x)$，$g_3(x)$都不整除$f(x)$。

综上所述$f(x)$不可能有二次因式！

而$p=2$满足

1）$p\nmid a_5$，$p\nmid a_4$；

2）$p|a_3$，a_2，a_1，a_0；

3）$p^2\nmid a_0$，

故由定理5知$f(x)$在有理数域上不可约！

下面两例说明定理5、7中的条件也只是$f(x)$在有理数域上不可约的充分条件，而不是必要条件。

例4　$f(x)=x^6+x^3+1$，

$f(x)$无有理根也无二次因式，不存在满足定理5要求的素数p，但$f(x)$在有理数域上不可约（令$x=y+1$，再由

*Eisenstein*判别法知$f(x)$不可约）。

例 5 $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+1$（$p$为素数）。

$f(x)$没有k次因式，$k<\left[\frac{p-1}{2}\right]$。不存在满足定理7条件的素数$p$，但$f(x)$在有理数域上不可约（因$f(x)$为分圆多项式）。

三、关于Cramer法则的研究

Cramer 法则 如果方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \quad (1)$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组（1）有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}。 \quad (2)$$

其中D_i ($i=1, 2, \cdots, n$) 是将D的第i列换成常数项b_1，b_1，…，b_n所得的n阶行列式。

1．三种新证法

众多的教科书将*Cramer*法则放在行列式部分，这对于

综合应用行列式性质及其运算技巧不无起到画龙点睛的作用。因此，如何巧妙地利用行列式的方法给出简单证明，就是一个很有意义的问题。这里介绍三种不同的新证法，都较别致，巧妙。

证法1°

先证解的唯一性。若方程组（1）有解，且设x_1，x_2，…，x_n为其任一解，则对以下的$n+1$阶行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_1 D.$$

但另一方面，用x_1，x_2，…，x_n分别乘其第2，3，…，$n+1$列后都加到第1列，然后再按第1行展开即得

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_1{}^2 & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1 .$$

于是得$x_1 D = D_1$，由于$D \neq 0$，故必得$x_1 = \frac{D_1}{D}$。同理可得$x_2 = \frac{D_2}{D}$，$x_3 = \frac{D_3}{D}$，…，$x_n = \frac{D_n}{D}$，这说明（1）若有解，解

只能是（2）。

再证解的存在性。对以下有两行相同的 $n+1$ 阶行列式按第一行展开得

$$0=\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=b_1D-a_{11}D_1-a_{12}D_2-\cdots\cdots-a_{1n}D_n。$$

由于 $D\neq 0$，于是可得：$a_{11}\dfrac{D_1}{D}+a_{12}\dfrac{D_2}{D}+\cdots+a_{1n}\dfrac{D_n}{D}$ $=b_1$，这说明（2）满足方程组（1）的第一个方程。类似可证，（2）也满足方程组（1）中其余各方程。

证法 2°

先证解的存在性。对每个 i（$i=1, 2, \cdots, n$），有

$$b_iD=\begin{vmatrix} b_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

用（-1）乘以第 $i+1$ 行以后加到第 1 行，再按第 1 行展开得

$$b_iD=\begin{vmatrix} 0 & -a_{i2} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}D_1+a_{i2}D_2+\cdots+a_{in}D_n。$$

由于$D\neq 0$，故

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=b_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,$$

n)，即(2)确为(1)的解。

再证解的唯一性。设x_1，x_2，…，x_n为方程组(1)的任一解，则下式显然成立。

用$-x_1$，$-x_2$，…，$-x_n$ 分别乘以第1列，第3 列，…，第$n+1$列后加到第2列,再按第2列展开得

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=x_1\cdot D$$

于是$D_1=x_1\cdot D$，而$D\neq 0$，所以$x_1=\dfrac{D_1}{D}$。同理可证$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，…，$x_n=\dfrac{D_n}{D}$。因此(1)的解必是(2)。

综上所述，方程组(1)当$D\neq 0$时有唯一解。

证法 3°

先证解的唯一性。若方程组(1)有解，且x_1，x_2，…，x_n为其任一解，则

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{12}x_2 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_2 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$
\cdots + \begin{vmatrix} a_1 x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2n} x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn} x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},
$$

上式右端从第2项起，每个行列式都有两列成比例，故均为0。因此上式为

$$
D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} x_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} x_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_1 \cdot D,
$$

因$D \neq 0$，故得$x_1 = \dfrac{D_1}{D}$。同理可证$x_i = \dfrac{D_i}{D}$（$i = 2$，$\cdots$，n）。

再证解的存在性。由于

$$
0 = \begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= b_i D - a_{i1} D_1 - \cdots - a_{in} D_n.
$$

而$D\neq0$，故$a_{i1}\dfrac{D_1}{D}+\cdots+a_{in}\dfrac{D_n}{D}=b_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，即（2）为（1）的解。

综上所述（1）当$D\neq0$时有唯一解。

2．Cramer法则的推广

为推广Cramer法则，先就Laplace定理做点注记。

定理1 设D是一个n阶行列式，在D中任取k（$1\leq k\leq n$）行（列），则位于这k行（列）中所有的k阶子式与另k行（列）（即与前面所取的k行或列不完全相同）中对应的子式的代数余子式乘积的和等于0。

证明 设取定D的第r_1，r_2，…，r_k行，且令

$$D=\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r_11} & a_{r_12} & \cdots & a_{r_1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r_21} & a_{r_22} & \cdots & a_{r_2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r_k1} & a_{r_k2} & \cdots & a_{r_kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ (r_1) \\ \\ (r_2) \\ \\ (r_k) \\ \end{matrix}$$

（$1\leq r_1<r_2<\cdots<r_k\leq n$），则位于这$k$行中的$k$阶子式共有$s=C_n^k$个，设为$M_1$，$M_2$，…，$M_s$。

现在在D中另取k行，设为第t_1，t_2，…，t_k行（$1\leq t_1<t_2<\cdots<t_k\leq n$），且

$$(r_1, r_2, \cdots, r_k) \neq (t_1, t_2, \cdots, t_k).$$

再设B_1, B_2, …, B_s为D的第t_1, t_2, …, t_k行中所有相应k阶子式的代数余子式。

现在把D中第t_1, t_2, …, t_k行的元素依次分别换成D中第r_1, r_2, …, r_k行的元素，其余各行的元素不动，设这样得到的行列式为C，则

$$C=\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r_11} & a_{r_12} & \cdots & a_{r_1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r_21} & a_{r_22} & \cdots & a_{r_2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r_k1} & a_{r_k2} & \cdots & a_{r_kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (t_1) \\ \\ (t_2) \\ \\ (t_k) \\ \\ \end{matrix}$$

由于这两组k行不完全一样，故行列式C至少有两行完全相同，从而$C=0$。另一方面，根据$Laplace$定理，对C按第t_1, t_2, …, t_k行展开，则位于这k行中的所有k阶子式就是M_1, M_2, …, M_s，而这些子式在C中相应的代数余子式就是B_1, B_2, …, B_s，从而

$$C=M_1B_1+M_2B_2+\cdots+M_sB_s.$$

即$M_1B_1+M_2B_2+\cdots+M_sB_s=0$.

以上讨论对列同样成立。

为方便，用$D\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_k \end{pmatrix}$表示位于行列式$D$

的第r_1，$r_2\cdots$，r_k行且位于第r_1，r_2，…，r_k列交叉位置上元素所构成的k阶子式。

现在对于固定k行中的C_n^k个k阶子式按字典排列法（比较所在列的序数，先比较第一个数码，数码小的子式在前，大的在后。若第一个数码相同，再比较第二个数码，依此类推）排成一行，对于固定k列中的C_n^k个k阶子式按字典排列法排成一列。这样便得到一个$s=C_n^k$阶的方阵，设为

$$M=\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1s} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ M_{s1} & M_{s2} & \cdots & M_{ss} \end{pmatrix},$$

称它为方阵（方程组（1）的系数矩阵）的k阶子式阵。当$k=1$时，M就是A。

现在考虑方程组

$$\begin{cases} M_{11}x_1+M_{12}x_2+\cdots+M_{1s}x_s=b_1' \\ M_{21}x_1+M_{22}x_2+\cdots+M_{2s}x_s=b_2' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{s1}x_1+M_{s2}x_2+\cdots+M_{ss}x_s=b_s' \end{cases} \qquad (3)$$

其中$b_1'=b_1b_2\cdots b_k$，$b_2'=b_1b_2\cdots b_{k-1}b_{k+1}$，…，$b_s'=b_{n-k+1}\cdots$

b_n。即b'_1，b'_2，…，b'_s就是b_1，b_2，…，b_n每次取k个的乘积，而且前后次序也是按字典排列法（根据足码）排列的。

定理2 如果方程组(1)的系数行列式$D\neq 0$，则方程组(3)有唯一解：

$$x_1=\frac{C_1}{D},\ x_2=\frac{C_2}{D},\ \cdots,\ x_s=\frac{C_s}{D}. \qquad (4)$$

其中$C_j=b'_1B_{1j}+b'_2B_{2j}+\cdots+b'_sB_{sj}$，$j=1, 2, \cdots, s$，而$B_{1j}$，$B_{2j}$，…，$B_{sj}$依次为$k$阶子在$M_{1j}$，…，$M_{sj}$在$D$中的代数余子式。

证明 先证(4)确为(3)的解。

将(4)代入(3)的第一个方程的左端，再根据$Laplace$定理及定理1得

$$M_{11}\frac{C_1}{D}+M_{12}\frac{C_2}{D}+\cdots+M_{1s}\frac{C_s}{D}$$

$$=\frac{1}{D}(M_{11}C_1+M_{12}C_2+\cdots+M_{1s}C_s)$$

$$=\frac{1}{D}\Big(M_{11}(b'_1B_{11}+b'_2B_{21}+\cdots+b'_2B_{s1})$$

$$+M_{12}(b'_2B_{12}+b'_2B_{22}+\cdots+b'_2B_{s2})$$

$$+\cdots+M_{1s}(b'_2B_{12}+b'_2B_{1s}+b'_2B_{2s}+\cdots+b'_2B_{ss})\Big)$$

$$=\frac{1}{D}\Big(b'_1(M_{11}B_{11}+M_{12}B_{12}+\cdots+M_{1s}B_{1s})$$

$$+b'_2(M_{11}B_{21}+M_{12}B_{22}+\cdots+M_{1s}B_{2s})$$

$$+\cdots+b'_s(M_{11}B_{s1}+M_{12}B_{s2}+\cdots+M_{1s}B_{ss})$$

$$=\frac{1}{D}(b'_1\cdot D+b'_2\cdot 0+\cdots+b'_s\cdot 0)$$

$$=b'_1\cdot$$

即(4)满足(3)的第一个方程。

同理可证(4)也满足(3)的其余各方程。因此，(4)是(3)的一解。

再证解的唯一性。

用B_{11}，B_{21}，…，B_{s1}依次乘方程组(3)中的第1，2，…，s个方程的两端，然后相加，同样根据Lalapce定理及定理1可得

$$Dx_1=b'_1B_{11}+b'_2B_{21}+\cdots+b'_sB_{s1}=C_1$$

由于$D\neq 0$，故$x_1=\dfrac{C_1}{D}$.

同理可得$x_2=\dfrac{C_2}{D}$，…，$x_s=\dfrac{C_s}{D}$.这就是说当x_1，x_2，…，x_s为(3)的任一解时，这个解必为(4).

综上所述，(4)为(3)的唯一解。

当$k=1$时，定理2即为Cramer法则。

推论 方阵A是满秩的充分必要条件是A的k阶子式阵

M是满秩的。

证明 由线性方程组的理论知，方程组(1)或(3)有唯一解的充分必要条件是它们的系数方阵是满秩的，再根据定理2即得结论。

3. 利用Cramer法则求行列式的值

Cramer法则对部分 n 阶行列式的计算也是非常有用的。思想方法是这样的：在Cramer法则中，对于每一个 i 都有 $D_i = x_i D$。因此，对于一个 n 阶行列式 Δ，如果能恰当地引入一个线性方程组，使得对于某一个 i 有 $D_i = \Delta$，而其系数行列式 D 是已知的或容易计算的，且解 x_i 或积 $x_i D$ 又容易用其他方法得出，则就能确定行列式 Δ 的值：$\Delta = D_i = x_i D$。下面举例说明：

例1 计算 n 阶行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}.$$

解　引入方程组（λ_i为未知数）

$$\begin{cases} x\lambda_1 & = a_n \\ -\lambda_1 + x\lambda_2 & = a_{n-1} \\ \quad -\lambda_2 + x\lambda_3 & = a_{n-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \quad -\lambda_{n-2} + x\lambda_{n-1} & = a_2 \\ \quad\quad -\lambda_{n-1} + \lambda_n & = a_1 + x, \end{cases}$$

显然其系数行列式$D = x^{n-1}$，$\Delta_n = D'_n = D = \lambda_n D_n$。从第二个方程起，将第 i 个方程乘以 x^{i-1}，然后与第一个方程一起相加，即得

$$x^{n-1}\lambda_n = x^{n-1}(x + a_1) + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \cdots +$$

$a_{n-1}x + a_n$，故$\Delta_n = \lambda_n D = x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}$。

例 2　计算行列式（n 阶）

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

解 引入方程组（λ_i为未知数）

$$\begin{cases} x\lambda_1+y\lambda_2 = x \\ x\lambda_2+y\lambda_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x\lambda_{n-1}+y\lambda_n = 0 \\ x\lambda_n = y, \end{cases}$$

显然其数行列式$D=x^n$，且$\Delta=D_1=\lambda_1 D=\lambda_1 x^n$。将第$i$个方程乘以$(-1)^{i+1}x^{n-i}y^{i-1}$，然后相加得

$$\lambda_1 x^n = x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

故$\Delta=x^n+(-1)^{n+1}y^n$。

例3 计算n阶行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}.$$

解 引入方程组（x_i 为未知数）

$$\begin{cases} x_1+ax_2+ax_3+\cdots+ax_n=\lambda \\ \quad ax_2+\beta x_3+\cdots+\beta x_n=b \\ \quad \beta x_2+ax_3+\cdots+\beta x_n=b \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad \beta x_2\cdots\beta x_3+\cdots+ax_n=b, \end{cases}$$

则其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & a & a & \cdots & a \\ 0 & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}_{(n-1\text{阶})}$$

$$=[\alpha+(n-2)\beta](\alpha-\beta)^{n-2}.$$

因此，$\triangle=D_1=x_1D=[\alpha+(n-2)\beta](\alpha-\beta)^{n-2}x_1$。将后$n-1$个方程相加得

$$[\alpha+(n-2)\beta]\sum_{i=2}^{n} x_i=(n-1)b.$$

将第1个方程乘以$\alpha+(n-2)\beta$并将上式代入得

$$[\alpha+(n-2)\beta]x_1+(n-1)ab=\lambda[\alpha+(n-2)\beta].$$

所以 $[\alpha+(n-2)\beta]x_1=\lambda[\alpha+(n-2)\beta]-(n-1)ab$.故

$$\Delta=[\alpha+(n-2)\beta](\alpha-\beta)^{n-2}x_1$$
$$=(\alpha-\beta)^{n-2}\{\lambda[\alpha+(n-2)\beta]-(n-1)ab\}.$$

例4 计算n阶行列式

$$\Delta_n(s)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

解 引入方程组（λ_i 为未知数）

$$\begin{cases} \lambda_1+x_1\lambda_2+x_1^2\lambda_3+\cdots+x_1^{n-1}\lambda_n=x_1^n \\ \lambda_1+x_2\lambda_2+x_2^2\lambda_3+\cdots+x_2^{n-1}\lambda_n=x_2^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1+x_n\lambda_2+x_n^2\lambda_3+\cdots+x_n^{n-1}\lambda_n=x_n^n, \end{cases}$$

则其系数行列式 D 为一个 *Vandermonde* 行列式，所以 $D=\prod\limits_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$。又

$$D_{s+1}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{s-1} & x_1^{n} & x_1^{s+1} & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{s-1} & x_2^{n} & x_2^{s+1} & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{s-1} & x_n^{n} & x_n^{s+1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=D\lambda_{s+1}$$

于是 $\Delta_n^{(s)}=(-1)^{n-(s+1)}D_{s+1}=(-1)^{n-(s+1)}D\lambda_{s+1}$

但前面的方程组又可视为 n 次代数方程

$$x^n-\lambda_n x^{n-1}-\cdots-\lambda_{s+1}x^s-\cdots-\lambda_2 x-\lambda_1=0$$

有 n 个根 x_1，x_2，$\cdots$，x_n。由根与系数的关系得

$$\sum x_{i1}x_{i2}\cdots x_{i(n-s)}=(-1)^{n-s}(-\lambda_{s+1})。$$

其中求和取遍 n 个数 1，2，$\cdots$，n 中 $n-s$ 个的所有组合，所以 $\lambda_{s+1}=(-1)^{n-(s+1)}\sum x_{i1}x_{i2}\cdots x_{i(n-s)}$，故

$$\Delta_n^{(s)}=\sum x_{i1}x_{i2}\cdots x_{i(n-s)}\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)。$$

例 5 计算 n 阶行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ a_2 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

解 引入方程组（λ_i 为未知数）

$$\begin{cases}\lambda_1+x_1\lambda_2+x_1^2\lambda_3+\cdots+x_1^{n-1}\lambda_n=a_1\\ \lambda_1+x_2\lambda_2+x_2^2\lambda_3+\cdots+x_2^{n-1}\lambda_n=a_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_1+x_n\lambda_2+x_n^2\lambda_3+\cdots+x_n^{n-1}\lambda_n=a_n,\end{cases}$$

则其系数行列式$D=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$。显然有$\triangle=D_1$。

所以$\triangle=D\lambda_1$。

另一方面，又可以将此方程组视为$n-1$次多项式

$f(x)=\lambda_n x^{n-1}+\lambda_{n-1}x^{n-2}+\cdots+\lambda_2 x+\lambda_1$

在点x_i处的值为a_i，即$f(x_i)=a_i$（$1\leq i\leq n$）。由$Lagrange$扦值公式有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\{[a_i(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})$$

$$\cdots(x-x_n)]/[(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})$$

$$(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)]\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i g(x)}{(x-x_i)g'(x_i)}.$$

其中

$$g(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i).$$

于是$\lambda_1=f(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i g(0)}{-x_i g'(x_i)}$

$$=(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\prod_{i=1}^{n}x_j}{x_i g'(x_i)}.$$

因此，

$$\blacktriangle=(-1)^{n-1}\prod_{1\leqslant i<i<n}(x_i-x_j)\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i.$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i g'(x_i)}.$$

例6 证明

$$\begin{vmatrix} A & y \\ x' & \alpha \end{vmatrix}=a|A|-x'A^*y.$$

其中A为一n阶矩阵，A^*为A的伴随矩阵，x，y都是n维列向量，x'为x的转置。

证明 考虑关于未知数 λ_1，λ_2，…，λ_{n+1} 的线性方程组

$$\begin{cases} A\lambda = y & (1) \\ x'\lambda + \lambda_{n+1} = a & (2) \end{cases}$$

其中$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)'$.

显然此方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} A & 0 \\ x' & 1 \end{vmatrix} = |A| .$$

且 $$\begin{vmatrix} A & y \\ x' & a \end{vmatrix} = D_{n+1} = D\lambda_{n+1} = |A|\lambda_{n+1} \qquad (3')$$

又由方程(2′)有$\lambda_{n+1} = a - x'\lambda$，所以

$$|A|\lambda_{n+1} = a|A| - |A|x'\lambda \qquad (4')$$

但$A^*A = |A|E$（E为n级单位矩阵），且由方程组(1′)有$A\lambda = y$.所以

$$\begin{aligned} |A|x'\lambda &= x'(|A|\lambda) \\ &= x'(|A|(E\lambda)) \\ &= x'(|A|E)\lambda \\ &= x'(A^*A)\lambda = x'A^*(A\lambda) \\ &= x'A^*y . \end{aligned}$$

从而由（3′）、（4′）两式即得

$$\begin{vmatrix} A & y \\ x' & a \end{vmatrix} = a|A| - x'A^*y .$$

例7 证明

1°. 如果 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ ($a_{ij}=a_{ji}$)是正定二次型，那么

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型。

2°. 如果A是正定矩阵，那么$|A|\leq a_{nn}P_{n-1}$，这里P_{n-1}是A的$n-1$级的顺序主子式。

证明 1°. 记$A=(a_{ij})$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)'$. 则由例6知

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n)=\begin{vmatrix} A & y \\ x' & 0 \end{vmatrix}=-y'A^*y .$$

由已知A是正定的，所以A^*是正定的，故$f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$是负定的。

2°. 由例6有

$$|A|=a_{nn}P_{n-1}-x'(A^{(n-1)})^*x \qquad (5')$$

其中$A^{(n-1)}$表示A的$n-1$级顺序主子阵，$x=(a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{n-1n},)'$.

因A正定，所以$A^{(n-1)}$正定，从而$(A^{(n-1)})^*$正定。于是$x'(A^{(n-1)})^*x\geq 0$。故由（5′）式即知，$|A|\leq a_{nn}P_{n-1}$，且等号当且仅当$x=0$即$a_{in}=0$（$1\leq i\leq n-1$）时成立。

四、线性方程组的进一步讨论

1．初等变换是仅有的同解变换

本节将证明初等变换是线性方程组仅有的同解变换——同解定理。

定义 1　两个线性方程组若有相同的解集，则称它们是同解的。

定义 2　线性方程组的初等变换是指对线性方程组施行以下变换。

（1）换位变换：交换两个方程的位置；

（2）倍法变换：用一个非零的数乘某个方程；

（3）消法变换：用一个数乘某个方程后加到另一个方程上去。

易证

定理 1　初等变换把一个线性方程组变为与它同解的方程组，即初等变换是线性方程组的同解变换。

这个定理的逆是否成立呢？即若两个线性方程组同解，其中的一个方程组是否一定可由另一个方程组经初等变换得到呢？回答是肯定的！下面首先给出矩阵乘积的秩定理的一个逆形式，并应用它证明线方程组的同解定理。

定理 2　两个矩阵的乘积的秩不大于每一因子的秩。特别，当有一个因子是可逆矩阵时，乘积的秩等于另一因子的

秩。

上述定理及其证明，一般高代教材中均有论述，此处不再证明。我们考虑定理后一结论的逆：设$B=AP$，其中A、B都是$m\times n$矩阵，P是$n\times n$矩阵。如果秩$B=$秩A，能否断定P是可逆的？回答是否定的！例如，令

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&-1&-3\\1&2&5\end{pmatrix},$$

则$B=AP$，秩$B=2=$秩A，P不可逆。

因此，我们改变以上的提问方式：设$B=AP$，其中A、B都是$m\times n$矩阵，P是$n\times n$矩阵。如果秩$B=$秩A，是否存在$n\times n$可逆矩阵T使得：

$B=AT$？

对此，有肯定的回答。以下总假定V是数域F上的一个向量空间，而且把能够表成若干个第一类初等矩阵的乘积的n阶可逆矩阵叫做n阶置换矩阵。

引理 1 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$；$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\in V$，且

$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$。

如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关，则

$\dim L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)=$秩$A$。

证明 设秩$A=r$，当$r=0$时，结论是平凡的。

设$r>0$，则存在n阶可逆矩阵P和m阶可逆矩阵Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令$(\alpha_1', \cdots, \alpha_n')=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P^{-1}$，$(\beta_1' \cdots, \beta_m')=(\beta_1, \cdots, \beta_m)Q$。则

$$(\beta_1', \cdots, \beta_m')=(\alpha_1', \cdots, \alpha_n')PAQ.$$

$$=(\alpha_1', \cdots, \alpha_r', \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-r\text{个}})$$

由P^{-1}可逆知$\alpha_1', \cdots, \alpha_r'$线性无关，又由$Q$可逆得

$$L(\beta_1, \cdots, \beta_m)=L(\beta_1', \cdots, \beta_m')=L(\alpha_1', \cdots, \alpha_r').$$

所以$dimL(\beta_1, \cdots, \beta_m)=r=$秩$A$。

定理3 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$；$\beta_1, \cdots, \beta_n\in V$。如果

$$L(\beta_1, \cdots, \beta_n)\subseteq L(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

则存在n阶矩阵P，使得

$$(\beta_1 \cdots, \beta_n)=(\alpha_1, \cdots \alpha_n)P,$$

且秩$P=n-r+s$，这里$r=dimL(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$s=dim L(\beta_1, \cdots, \beta_n)$。

证明 显然$0\leq s\leq r\leq n$。

(1) $s=0$

1° $r=0$，取$P=I_n$即可；

2° $r=n$，取$P=0$即可；

3° $0<r<n$，存在n阶置换矩阵P_1使得$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P_1=(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_n})$，

其中$\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}\}$是$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$的一个极大线性无关组，于是存在$r\times(n-r)$矩阵$A$，使得

$$(-\alpha_{i_{r+1}},\cdots,-\alpha_{i_n})=(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r})A.$$

令

$$P=P_1\begin{pmatrix}0 & A\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix},$$

则$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$，且秩$P=n-r+s$

(2) $s>0$

1° $r=n$，因为$L(\beta_1,\cdots,\beta_n)\subseteq L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，所以存在$n$阶矩阵$P$，使得$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$，又因为$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关，所以由引理1得

$$\text{秩}P=\dim L(\beta_1,\cdots,\beta_n)=s=n-r+s.$$

2° $r<n$，存在n阶置换矩阵P_1,P_2使得

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P_1=(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}),$$

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)P_2=(\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s}),$$

其中$\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}\}$，$\{\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s}\}$分别是$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$、$\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$的极大线性无关组。于是

$$L(\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s})\subseteq L(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}),$$

故存在r阶矩阵A使得

$$(\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s})=(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r})A_r.$$

因为$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关，所以由引理1得

$$\text{秩}A_r=\dim L(\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s})=s.$$

又因为$\beta_{j_k}-\alpha_{i_k}\in L(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r})$，$k=r+1,\cdots,n$，所以存在$r\times(n-r)$矩阵$B$使得

$$(\beta_{j_{r+1}}-\alpha_{i_{r+1}},\cdots,\beta_{j_n}-\alpha_{i_n})=(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r})B.$$

令

$$P=P_1\begin{pmatrix} A_r & B \\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}P_2,$$

则$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$，且秩$P=n-r+s$。

证毕。

因为一个矩阵A的秩等于A的列空间的维数，所以定理3有如下的矩阵形式的表述

定理4 设A、B都是$m\times n$矩阵，如果

（i）存在$n\times n$矩阵C，使得$B=AC$；

（ii）秩$A=r$，秩$B=s$，

则存在$n\times n$矩阵P，使得$B=AP$，且秩$P=n-r+s$。

推论 设A、B都是$m\times n$矩阵，如果

（i）存在$n\times n$矩阵C，使得$B=AC$；

（ii）秩B=秩A，

则存在$n\times n$可逆矩阵P，使得$B=AP$。

到此，我们回答了前面提出的问题。下面讨论线性方程组的同解变换，首先有

引理2 如果$AX=b$和$CX=d$有相同的非空解集，则$AX=0$和$CX=0$有相同的解空间。从而秩(A,b)=秩(C,d)。

证明 设γ是$AX=b$，$CX=d$的一个特解，ω_1、ω_2分别是$AX=0$，$CX=0$的解空间。

若$\eta\in\omega_1$，则$\gamma+\eta$是$AX=b$的解，从而也是$CX=d$的解，故

$$C\eta=C(\gamma+\eta)-C\gamma=d-d=0$$

所以$\omega_1\subseteq\omega_2$，同理，$\omega_2\subseteq\omega_1$。所以$\omega_1=\omega_2$。故秩$A$=秩$C$，秩$(A, b)$=秩$(C, d)$。

定理5 （同解定理）设$\overline{A}=(A, b)$，$\overline{C}=(C, d)$分别是$m\times(n+1)$矩阵和$s\times(n+1)$矩阵，且$s\leq m$，那么，以$\overline{A}$、$\overline{C}$为增广矩阵的两个线性方程组同解的充分且必要条件是，存在一个m阶可逆矩阵P使得

$$\begin{pmatrix}\overline{C}\\ 0_{m-s}\end{pmatrix}=P\overline{A}.$$

其中0_{m-s}是一个$(m-s)\times(n+1)$零矩阵。

证明 充分性 设m阶可逆矩阵P，使得

$$\begin{pmatrix}\overline{C}\\ 0_{m-s}\end{pmatrix}=P\overline{A}.$$

那么，对每一个$(x_1, \cdots, x_n)\in F^n$，有

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=b\Longleftrightarrow\overline{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ -1\end{pmatrix}=0\Longleftrightarrow P\overline{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ -1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\overline{C}\\ \\ 0_{m-s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ -1\end{pmatrix}=0\Longleftrightarrow\overline{C}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ -1\end{pmatrix}=0\Longleftrightarrow C\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=d.$$

所以，$AX=b$和$CX=d$同解。

必要性　设$AX=b$和$CX=d$同解，则二者都和

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

同解。由引理2得秩$A=$秩$\begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{C} \end{pmatrix}=$秩$\overline{C}$。设$\overline{A}$、$\overline{C}$的行向量组分别是$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$，$\{\beta_1, \cdots, \beta_s\}$，则有

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = L(\alpha_1 \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_s)$$

$$= L(\beta_1, \cdots, \beta_s) = L(\beta_1, \cdots, \beta_s, \overbrace{0, \cdots, 0}^{m-s\text{个}}),$$

由定理3，存在m阶可逆矩阵T使得

$$(\beta_1, \cdots, \beta_s, \overbrace{0, \cdots, 0}^{m-s\text{个}}) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) T.$$

令$P=T^{-1}$，则P是m阶可逆矩阵，且$\begin{pmatrix} \overline{C} \\ 0_{m-s} \end{pmatrix} = P\overline{A}$.

2. 利用矩阵列初等变换解线性方程组

下面介绍用矩阵列初等变换解一般线性方程组的方法，此法在许多情况下应用起来比较方便。

设给出一个一般线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

为方便，将（1）写成矩阵形式

$$A_{mn}X_{n1}=B_{m1}. \quad (2)$$

首先证明

命题 设矩阵$C=\begin{pmatrix} A_{mn} & B_{m1} \\ & I_{n+1} \end{pmatrix}$。若秩$A=r$，则矩阵$C$经过列的初等变换等价于如下形式的矩阵

$$G=\begin{pmatrix} D_{mr} & 0_1 & 0_2 & \cdots & 0_{n-r} & E_{m1} \\ *_{nr} & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-r} & F_{n1} \\ 0_{1r} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中I_{n+1}为$n+1$阶单位矩阵，$0_i\in F^m$，$i=1,\cdots,n-r$均为零向量，$\alpha_i\in F^n$，$i=1,2,\cdots,n-r$，且存在$n+1$阶可逆矩阵P_{n+1}，使得以下两式成立

$$(A_{mn}, B_{m1})P_{n+1}=(D_{mr}, 0_1, 0_2, \cdots, 0_{n-r}\ E_{m1}). \quad (4)$$

$$I_{n+1}P_{n+1}=\begin{pmatrix} *_{nr} & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-r} & F_{n1} \\ 0_{1r} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

事实上，由于秩A为r，则矩阵C等价于矩阵G是显然的。由于对矩阵C做一次列初等变换，相当于对矩阵(A_{mn}, B_{m1})及I_{n+1}右乘同一个初等矩阵。经过有限次的对矩阵C做列的初等变换，相当于对矩阵C右乘一系列初等矩阵。矩阵P_{n+1}就是这些初等矩阵的乘积。所以（3）、（4）、（5）成立是必然的。由命题易推出

推论1 线性方程组（1）有解的充要条件是（3）式中的E_{m1}为零矩阵。

事实上，这和"线性方程组有解的充要条件是它的系数矩阵和增广矩阵有相同的秩"是一致的。

推论2　若（1）有解，则（3）式中F_{n1}就是（1）的一个特解，而α_1，α_2，…，α_{n-r}就是（1）的一个基导出组的础解系。

事实上，将（5）式代入（4）得

$$(A_{mn}, B_{m1})\begin{pmatrix} *_{nr} & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-r} & F_{n1} \\ 0_{1r} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=(D_{mr}, 0_1, 0_2, \cdots, 0_{n-r}, 0_{m1}) \qquad (6)$$

上式两端对照得：$A_{mn}\alpha_i + B_{m1}0 = 0_i$，$i=1, 2, \cdots, n-r$。故得

$$A_{mn}\alpha_i = 0_i, \quad i=1, 2, \cdots, n-r \qquad (7)$$

由（7）式可以看出α_1，α_2，…，α_{n-r}均为（1）的导出组的解向量。由（5）式又知α_1，α_2，…，α_{n-r}线性无关，所以，α_1，α_2，…，α_{n-r}是（1）的导出组的一个基础解系。

由（6）式又得：

$$(A_{mn}, B_{m1})\begin{pmatrix} F_{n1} \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{m1} \qquad (8)$$

由（8）式进一步得：$A_{mn}F_{n1} - B_{m1} = 0_{m1}$。即

$$A_{mn}F_{n1} = B_{m1} \qquad (9)$$

所以F_{n1}为（1）的一个特解。从而线性方程组（1）的通解为

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r} + F_{n1}, \quad k_i \in F.$$

$i=1, \cdots, n-r$。

利用此方法求解非齐次线性方程组的通解可以分三步

进行：

第一步　设出矩阵$C=\begin{pmatrix} A_{mn} & B_{m1} \\ I_{n+1} & \end{pmatrix}$，

第二步　将矩阵C通过列的初等变换化为（3）的形式，并且判断有解否，若E_{m1}为零（1）有解，否则无'

第三步　若线性方程组（1）有解，则（3）式中的α_1，α_2，…，α_{n-r}就是（1）的导出组的一个基础解系，F_{n1}就是（1）的一个特解，则（1）的通解为

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}+F_{n1},$$

其中$k_i\in F$，$i=1,2,\cdots,n-r$。

例1　解线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3+x_4=7 \\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=1 \\ x_1-3x_2-6x_3+5x_4=0 \end{cases} \quad (10)$$

解　设矩阵

$$C=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

对C作列的初等变换

$$C\xrightarrow[T_{45}(-7)P_{14}]{T_{41}(-5)T_{42}(1)T_{43}(-2)}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&-1&8&12&15\\5&2&-16&-24&-35\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&1&-2&-5&-7\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[T_{24}(12)T_{25}(15)]{T_{21}(-2)T_{23}(8)}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\1&2&0&0&-5\\0&0&0&1&0\\-2&1&8&12&15\\0&0&1&0&0\\-1&1&6&7&8\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[D_5(-1)]{T_{51}\left(\frac{1}{5}\right)T_{52}\left(\frac{2}{5}\right)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 8 & 12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 4\frac{1}{5} & 6 & 7 & -8 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

此矩阵正是（3）的形式，但矩阵

$$E_{31}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

所以方程组（10）无解。

例2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=2 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=2 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=1 \end{cases} \qquad (11)$$

解 设

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

对C做列的初等换变

$$C\xrightarrow[T_{15}(-1)T_{16}(-1)T_{45}\left(\frac{5}{4}\right)T_{42}(-1)]{T_{12}(2)T_{13}(-1)T_{14}(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[D_3\left(-\frac{1}{4}\right)T_{36}(1)D_6(-1)]{T_{23}(3)T_{34}(-4)T_{34}(1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:cc:c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\
0 & 1 & -\frac{3}{4} & -1 & 0 & \frac{3}{4} \\
0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\
0 & -1 & \frac{3}{4} & 2 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right)$$

因为E_{41}为零矩阵，所以据推论2，线性方程组（11）有解。

（11）的一个特解为

$$\beta=\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ -\frac{3}{4},\ 0\right).$$

（11）的导出组的一个基础解系为

$\eta_1=(-1,\ -1,\ 1,\ 2,\ 0)$,

$$\eta_2 = \left(\frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{4},\ 1\right)$$

则线性方程组（11）的通解为：

$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \beta$，$k_1$、$k_2 \in F$。

注　$T_{ij}(k)$，$D_i(k)$，P_{ij}均为初等矩阵且

$AT_{ij}(k)$表示把矩阵A的第i列元素乘以k后加到第j列上去。

$AD_i(k)$表示把矩阵A的第i列元素乘以k（$\neq 0$）。

AP_{ij}表示把A的第i列元素与第j列元素对调。

五、线性方程组解的结构定理及其应用

1．齐次线性方程组的结构定理的应用

对数域F上的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=a_{1n+1} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=a_{2n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=a_{m,n+1} \end{cases} \qquad (1)$$

的导出齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \qquad (2)$$

的解有结构定理

定理1 数域F上的一个n个未知量的齐次线性方程组(2)的所有解作成F^n的一个子空间，称为这个齐次线性方程组的解空间。如果所给的方程组的系数矩阵的秩为r，则解空间的维数等于$n-r$，解空间的一组基叫做这个齐次线性方程

组的一个基础解系。

这里把定理1应用到线性方程组（1）的解的问题上，即把（1）的解的问题归结到它的增广齐次线性方程组有限制的解的问题，对（1）给出一个与定理1相应的命题1，并给出这个命题的一个应用。

定义1 对线性方程组（1），称

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+a_{1,n+1}x_{n+1}=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+a_{2,n+1}x_{n+1}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+a_{m,n+1}x_{n+1}=0 \end{cases} \quad (3)$$

为（1）的增广齐次方程组。

定义2 增广齐次方程组（3）在$x_{n+1}=-1$的限制下的解是指F^{n+1}中的元素$(c_1, c_2, \cdots, c_n, -1)$，其中$\forall c_i \in F(i=1, 2, \cdots, n)$，$(c_1, c_2, \cdots, c_n, -1)$是满足方程组（3）的解。

定义3 增广齐次方程组（3）在$x_{n+1}=-1$的限制下的解的极大线性无关组，称它为增广齐次方程组（3）在$x_{n+1}=-1$的限制下的极大解组。

命题1 在线性方程组（1）有解的条件下，增广齐次方程组（3）在$x_{n+1}=-1$的限制下的极大解组的个数为$n+1-r$，其中r为线性方程组（1）的系数矩阵的秩。

证明 因为（1）有解，则（1）的增广矩阵与系数矩阵的秩相等。而（1）的系数矩阵的秩为r，所以（1）的增广矩阵的秩也为r，不妨设系数矩阵的前r行是其行向量的一

个极大线性无关组，此时，增广矩阵的前r行也是其行向量的一个极大线性无关组。于是增广齐次线方程组（3）与下面的方程组（3）同解

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+a_{1,n+1}x_{n+1}=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+a_{2,n+1}x_{n+1}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n+a_{r,n+1}x_{n+1}=0 \end{cases} \tag{3'}$$

此时$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$与

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} & a_{r,n+1} \end{pmatrix}$$

的秩都是r，不妨设A的前r列是列向量的一个极大线性无关组，则A'的前r列也是A'的列向量的一个极大线性无关组。此时，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0$$

增广齐次方程组（3）可以写为

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r \\ \qquad =-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1,n+1}x_{n+1} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r \\ \qquad =-a_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2,n+1}x_{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_r \\ \qquad =-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{r,n+1}x_{n+1} \end{array}\right. \quad (4)$$

注意到，$r\leq n$。

①当$r=n$时，取$x_{n+1}=-1$，则由Cramer法则可知：对每个x_i（$i=1, 2, \cdots, n$）都有唯一的解$\frac{D_i}{D}$（$i=1, 2, \cdots, n$）。其中D_i是D中第i列换成（1）的常数项（$a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \cdots, a_{r,n+1}$）$'$。此时增广齐次方程组（3）在$x_{n+1}=-1$的限制下有唯一的解：

$$\eta=\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \cdots, \frac{D_n}{D}, -1\right).$$

而η是非零的，从而η为增广齐次方程组（3）在$x_{n+1}=-1$的限制下的极大解组，而此时$(n+1)-r=n+1-n=1$，此时命题1成立。

②当$r<n$时，把自由未知量在$x_{n+1}=-1$的限制下的任意给定的一组值（c_{r+1}，c_{r+2}，…，c_n，-1），代入增广齐次方程组（3），由Cramer法则就可以唯一地决定了（4）的一组解。

在方程组（4）分别用$(n+1)-r$维数组（1，0，…，0，-1），（0，1，…，0，-1），…，（0，0，…，1，-1）来代替自由未知量（x_{r+1}，x_{r+2}，…，x_{n+1}），就得出（4）的$(n+1)-r$个解

$$(5)\begin{cases}\eta_1=(c_{11},\ c_{12},\ \cdots,\ c_{1r},1,0,\ \cdots,0,\ -1)\\ \eta_2=(c_{21},c_{22},\ \cdots,c_{2r},\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 0,\ -1)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \eta_{n-r}=(c_{n-r,1},\cdots,c_{n-r,r},\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1,\ -1)\\ \eta_{n-r+1}=(c_{n-r+1,1},\cdots,c_{n-r+1,r},0,0,\cdots,0,-1)\end{cases}$$

现在证明（5）是增广齐次方程组（3）在$x_{n+1}=-1$的限制下的极大解组。

（i）首先证明：η_1，η_2，…，η_{n-r}，η_{n-r+1}是线性无关的。

$$\because k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}=0$$

$$\therefore(*,\cdots,*,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r},k_{n-r+1},-\sum_{i=1}^{n+1-r}k_i)=0$$

$$\therefore k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=k_{n-r+1}=0.$$

（ii）再证（3）在$x_{n+1}=-1$的限制下的任一解都可以由η_1，η_2，…，η_{n-r}，η_{n-r+1}线性表示。

设 $\eta=(c_1, c_2, \cdots, c_r, c_{r+1}, c_{r+2}, \cdots, c_n, -1)$ (6)

是(3)在$x_{n+1}=-1$的限制下的任意解，观察线性组合：

$$c_{r+1}\eta_1+c_{r+2}\eta_2+\cdots+c_n\eta_{n-r}-(\sum_{i=r+1}^{n}c_i-1)\eta_{n+1-r} \quad (7)$$

比较(6)、(7)可知最后$(n+1-r)$个分量有相同的值，由Cramer法则有

$$\eta=c_{r+1}\eta_1+c_{r+2}\eta_2+\cdots+c_n\eta_{n-r}-(\sum_{i=r+1}^{n}c_i-1)\eta_{n+1-r}.$$

综合(i)、(ii)可知，$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}, \eta_{n+1-r}$确实是增广齐次方程组(3)在$x_{n+1}=-1$的限制下的极大解组，此时命题1成立。

证毕！

下面给出命题1的一个应用。

命题2 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=a_{2,n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=a_{m,n+1} \end{cases} \quad (\text{I})$$

及

$$a_{m+1,1}x_1+\cdots+a_{m+1,n}x_n=a_{m+1,n+1} \quad (\text{II})$$

令$\alpha_i=(a_{i1}, \cdots, a_{in}, a_{i,n+1})$，$i=1,2,\cdots,m+1$。如果(I)的解都是(II)的解，则$\alpha_{m+1}$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots,$

α_m线性表示。

证明 设（Ⅰ）的系数矩阵的秩r，下面方程组（Ⅱ）的系数矩阵的秩为R。

因（Ⅰ）的所有解都是（Ⅱ）的解，所以

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=a_{1,n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=a_{m,n+1} \\ a_{m+1,1}x_1+\cdots+a_{m+1,n}x_n=a_{m+1,n+1} \end{cases} \quad (\text{Ⅱ})$$

与（Ⅰ）同解。此时（Ⅰ）、（Ⅱ）的增广齐次方程组在$x_{+1}=-1$的限制下是同解的，即它们的极大解组所含的向量个数是相等的。

由命题1有：$n+1-r=n+1-R$。所以$r=R$。由此推得α_{m+1}可由α_1，α_2，…，α_m线性表示。

2．非齐次线性方程组解的结构定理

在上节中，得出“非齐次线性方程组的增广齐次方程组在$x_{+1}=-1$的限制下的极大解组中所含解向量的个数为$n+1-r$（其中n，r分别为非齐次线性组的未知量的个数和系数矩阵的秩）”的结论。

下面，我们首先给出非齐次线性方程组解集合的重要性质，然后引出非齐次线性方程组的基础解系的概念，从而得到关于非齐次线性方程组的与齐次线性方程组的解的结构定理相应的结果。

设数域F上的非齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ b_i\text{不全为}0,\ i=1,\cdots,s. \quad (1)$$

的导出齐次线性方程组为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j = 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ s. \quad (2)$$

定理1 设γ_1，γ_2，…，γ_t是非齐次线性方程组（1）的t个解，u_1，u_2，…，u_t是数域F中的t个数，则线性组合$\sum_{k=1}^{t} u_k\gamma_k$是（1）的解的充分必要条件是 $\sum_{k=1}^{t} u_k=1$．

证明 先证明充分性．由 $\sum_{k=1}^{t} u_k=1$得 $u_1=1-\sum_{k=2}^{t} u_k$，从而$\sum_{k=1}^{t} u_k\gamma_k=u_1\gamma_1+\sum_{k=2}^{t}u_k\gamma_k=\left(1-\sum_{k=2}^{t} u_k\right)\gamma_1+\sum_{k=2}^{t} u_k\gamma_k=\gamma_1+\sum_{k=2}^{t} u_k(\gamma_k-\gamma_1)$，因$\gamma_k$（$k=1$，2，…，$t$）是（1）的$t$个解，故$\gamma_k-\gamma_1$（$k=2$，3，…，$t$）是（2）的$t-1$个解，从而 $\sum_{k=2}^{t} u_k(\gamma_k-\gamma_1)$ 是（2）的一个解，于是

$$\gamma_1+\sum_{k=2}^{t} u_k(\gamma_k-\gamma_1)\text{，即}\sum_{k=1}^{t} u_k\gamma_k\ \text{是(1)的解．}$$

再证必要性。设$\gamma_k=(c_{k1},\ c_{k2},\ \cdots,\ c_{kn})$，$k=1$，2，…，$t$，则

$$\sum_{k=1}^{t} u_k\gamma_k=\left(\sum_{k=1}^{t} u_k c_{k1},\ \sum_{k=1}^{t} u_k c_{k2},\cdots,\ \sum_{k=1}^{t} u_k c_{kn}\right),$$

$$(1')$$

且由γ_k（$k=1,2,\cdots,t$）是（1）的解，可知

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{kj}=b_j,\ k=1,2,\cdots,t \qquad (2')$$

将（1′）代入（1）的第i个方程的

$$\text{左端}=a_{i1}\sum_{k=1}^{t} u_k c_{k1}+a_{i2}\sum_{k=1}^{t} u_k c_{k2}+\cdots+a_{in}\sum_{k=1}^{t} u_k c_{kn}$$

$$=u_1\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{1j}+u_2\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{2j}+\cdots+u_t\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{tj}$$

$$\overset{\text{由}(2')}{=\!=\!=}u_1b_i+u_2b_i+\cdots+u_tb_i$$

$$=b_i\sum_{k=1}^{t} u_k,(i=1,2,\cdots,s).$$

由必要性的条件知(1′)是（1）的解，故有s个恒等式

$$b_i\sum_{k=1}^{t} u_k=b_i,\ i=1,2,\cdots,s. \qquad (3')$$

但（1）是非齐次的，b_i（$i=1,2,\cdots,s$）中至少有一个不为0，故由（3′）立即得到$\sum_{k=1}^{t} u_k=1$.

定理2 设γ_1是非齐次线性方程组(1)的一个解；η_1，η_2，…，η_{n-r}是(1)的导出组(2)的一个基础解系(r为(1)的系数矩阵的秩)；而γ_1，$\gamma_2=\eta_1+\gamma_1$，$\gamma_3=\eta_2+\gamma_1$，…，$\gamma_{n-r+1}=\eta_{n-r}+\gamma_1$ 是$n-r+1$个n维向量构成的向量组(将该向量组记作*)．则

1° *是(1)的$n-r+1$个解向量；

2° *是线性无关的；

3° (1)的任意解γ皆可由*线性表出。

关于定理2的证明，参看杨子胥编《高等代数习题解》上册第436题，此处不再给出证明．

由此便有

定义1 将定理2中的n维向量组*称为非齐次线性方程组(1)的一个基础解系．

为便于表述非齐次线性方程组解的结构，我们再给出次子空间的概念。

定义(2) 设W是数域F上线性空间V的一个非空子集，若$\forall\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in W$，都存在$a\in F$，使得对于$u_1,u_2,\cdots,u_m\in F$，只要$\sum_{k=1}^{m}u_k=a$，就有$\sum_{k=1}^{m}u_k\alpha_k\in W$，则称$W$为$V$的一个次子空间，称数$a$为次子空间$W$的次数。

由定义2易见，次数可为F中任意数的次子空间就是通常意义下的子空间，也就是说，次子空间是通常意义下的子空间概念的推广。

和在通常意义下的子空间中类似，在次子空间中也可引入维数与基的概念，这里无需重述。有了定义1和定义2，

再将定理1和定理2合在一起，便有

定理3 设数域F上非齐次线性方程组（1）的未知量个数是n，其系数矩阵秩为r，如果(1)有解，则

1° (1)有基础解系，并且基础解系中所含解向量的个数恰等于$n-r+1$；

2° (1)的解集合作成F^n的一个次数为1的$n-r+1$维的次子空间，(1)的基础解系就是该次子空间的基底。

定理3就是非齐次线性方程组的与齐次线性方程组的解的结构定理相应的结果，故可将它称为非齐次线性方程组的解的结构定理。

3．线性非齐次微分方程组解的结构定理

如果将非齐次线性方程组的解的结构思想应用到线性非齐次微分方程组上，可得到线性非齐次微分方程组的与线性齐次微分方程组的相应的解结构定理。同时可以看到高阶线性非齐次微分方程与高阶线性齐次微分方程也有解结构之相应结果。

设线性齐次微分方程组为

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j+f_i,\ (i=1,2,\cdots,n),\quad (1)$$

其导出线性齐次微分方程组是

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j,\ (i=1,2,\cdots,n),\quad (2)$$

其中a_{ij}，f_i (i，$j=1,2,\cdots,n$) 都是x的已知连续函数。

定理1 设$Y_1, Y_2, \cdots, Y_s$是线性齐次微分方程组（1）的s个解，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in F$（$F$是数域），则线性组合$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k Y_k$是组（1）的解的充要条件是$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k = 1$。

证明 由$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k = 1$得$\alpha_s = 1 - \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_k$，从而有

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k Y_k = \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_k Y_k + (1 - \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_k) Y_s = \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_k (Y_k - Y_s)$$

$+Y_s$，由于Y_k（$k = 1, 2, \cdots, s$）是（1）的s个解，所以$Y_k - Y_s$（$k = 1, 2, \cdots, s-1$）是（1）的导出组（2）的$s-1$个解，从而$\sum_{k=1}^{s-1} \alpha_k (Y_k - Y_s)$是（2）的一个解，故$\sum_{k=1}^{s-1} \alpha_k (Y_k - Y_s) + Y_s$即$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k Y_k$是（1）的解。

反之，设$Y_k = \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{nk} \end{pmatrix}$，$k = 1, \cdots, s$；

记$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{s}\alpha_k Y_k=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{s}\alpha_k y_{1k} \\ \sum_{k=1}^{s}\alpha_k y_{2k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{s}\alpha_k y_{nk} \end{pmatrix}$，由已知$Y$是（1）的解。将$Y$代入（1）得

$$\sum_{k=1}^{s}\alpha_k y'_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{s}\alpha_k y_{jk}\right)+f_i,$$

$i=1，2，\cdots，n$，即

$$\sum_{k=1}^{s}\alpha_k y'_{ik}=\sum_{k=1}^{s}\alpha_k\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_{jk}\right)+f_i,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

由于$Y_k(k=1,2,\cdots,s)$是方程组（1）的解，所以

$$y'_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{ij}y_{jk}+f_i,\quad i=1,\cdots,n,\quad k=1,2,\cdots,s.$$

代入（3）式得

$$\sum_{k=1}^{s}\alpha_k\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_{jk}+f_i\right)=\sum_{k=1}^{s}\alpha_k\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_{jk}\right)+f_i,$$

化简得

$$f_i = f_i \sum_{k=1}^{s} \alpha_k, \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4}$$

由于方程组(1)是非齐次的，f_i不全为零，所以由(4)式即得

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k = 1.$$

定理2 设Y_1是线性非齐次微分方程组(1)的一个解，$\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \cdots, \overline{Y}_n$是(1)的导出组(2)的一个基本解组，则向量函数组

$$Y_1, Y_2 = \overline{Y} + Y_1, Y_3 = \overline{Y}_2 + Y_1, \cdots, Y_{n+1} = \overline{Y}_n + Y_1 \tag{5}$$

是组(1)的$n+1$个线性无关的解向量，且组(1)的任意一个解Y都可由(5)线性表出。

证明 向量组(5)是方程组(1)的解是显然的。

由 $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k Y_k \equiv 0$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1} \in F$，即$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2(\overline{Y}_1 + Y_1) + \alpha_3(\overline{Y}_2 + Y_1) + \cdots + \alpha_{n+1}(\overline{Y}_n + Y_1) \equiv 0$，于是

$$\left(\alpha_1 + \sum_{k=2}^{n+1} \alpha_k\right) Y_1 \equiv -(\alpha_2 \overline{Y}_1 + \cdots + \alpha_{n+1} \overline{Y}_n). \tag{6}$$

若$\alpha_1+\sum_{k=2}^{n+1}\alpha_k\neq 0$，则

$$Y_1\equiv\frac{-1}{\alpha_1+\sum_{k=2}^{n+1}\alpha_k}\left(\alpha_2\overline{Y}_1+\cdots+\alpha_{n+1}\overline{Y}_n\right),$$

即Y_1可由导出组（2）的基本解组线性表示，Y_1是导出组（2）的一个解，又因方程组（1）是非齐次的，f_i不全为零，而已知Y_1是（1）的一个解，矛盾。于是$\alpha_1+\sum_{k=2}^{n+1}\alpha_k=0$，从而$\alpha_2\overline{Y}_1+\alpha_3\overline{Y}_2+\cdots+\alpha_{n+1}\overline{Y}_n\equiv 0$。由于$\overline{Y}_1$，$\overline{Y}_2$，…，$\overline{Y}_n$是（2）的一个基本解组，所以$\alpha_2=\cdots=\alpha_{n+1}=0$，继而$\alpha_1=0$，所以$Y_1$，$Y_2$，…，$Y_{n+1}$线性无关。

设Y是方程组（1）的任一解，则$Y-Y_1$是导出组（2）的一个解，则存在数α_1，α_2，…，$\alpha_n\in F$，使得

$$Y-Y_1\equiv\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{Y}_k,\text{即 }Y\equiv Y_1+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(Y_{k+1}-Y_1)\equiv$$

$$\left(1-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)Y_1+\sum_{k=1}^{n}\alpha_kY_{k+1}.$$令$c_1=1-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$，

$c_{k+1}=\alpha_k$，$k=1$，2，…，n，所以有$Y\equiv\sum_{k=1}^{n+1}c_kY_k$。

推论 1 线性非齐次微分方程组（1）一定存在$n+1$个线性无关解。

证明 由于a_{ij}，f_i（i，$j=1$，2，…，n）都是x的已知连续函数，所以方程组（1）的初始问题满足解的存在唯一性定理，且其导出齐次微分方程组（2）一定存在n个线性无关解。从而利用定理2即得结论。

定理 2′ 设Y_1，Y_2，…，Y_{n+1}是方程组（1）的任意$n+1$个线性无关解，则（1）的任何解Y恒可由该线性无关组线性表出。

证明 令$\overline{Y}_1=Y_2-Y_1,\overline{Y}_2=Y_3-Y_1,\cdots,\overline{Y}_n=Y_{n+1}-Y_1$，

则$\overline{Y_1},\overline{Y_2},\cdots,\overline{Y}_n$是（1）的导出线性齐次微分方程组（2）

的n个解，由$\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{Y}_k\equiv 0$，即$\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k(Y_{k+1}-Y_1)\equiv 0$，亦

即$\left(-\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\right)Y_1+\alpha_1Y_2+\cdots+\alpha_nY_{n+1}\equiv 0$，而$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n+1}$

线性无关，于是$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$，故$\overline{Y}_1$，$\overline{Y}_2,\cdots,\overline{Y}_n$是导出组（2）的一个基本解组，再由定理2易得定理2′的结论。

推论 2 线性非齐次微分方程组（1）的线性无关解的个数不多于$n+1$个。

证明 设Y_1，…，Y_{n+2}是（1）的任意$n+2$个解，若Y_1，$Y_2,\cdots,Y_{n+1}$线性相关，则Y_1，…，Y_{n+1}，Y_{n+2}也线性相关，若Y_1，$Y_2,\cdots,Y_{n+1}$线性无关，则由定理2′知，存在α_1,α_2，

…，$\alpha_{n+1}\in F$，使得$Y_{n+2}\equiv\alpha_1 Y_1+\alpha_2 Y_2+\cdots+\alpha_{n+1}Y_{n+1}$，即$\alpha_1 Y_1+\cdots+\alpha_{n+1}Y_{n+1}-Y_{n+2}\equiv 0$，由于$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_{n+1}$，$-1$不全为零，故$Y_1$，$Y_2$，…，$Y_{n+1}$，$Y_{n+2}$线性相关。

定义1 线性非齐次微分方程组（1）的任意$n+1$个线性无关的解称为（1）的一个基本解组。

定义2 设W是数域F上线性空间V的一个非空子集，若对任意的η_1，η_2，…，$\eta_m\in W$，都存在$a\in F$，且对于

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m\in F,\ 只要\ \sum_{k=1}^{m}\alpha_k=a\ 就有\ \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\eta_k\in W,$$

则称W为V的一个次子空间，称m为次子空间W的次数。

由上述定义及定理我们有

定理3 设数域F上线性非齐次微分方程组（1）的未知函数的个数为n，则。

1° 组（1）有基本解组且基本解组中所含解向量的个数等于$n+1$。

2° 组（1）的解集合作成数域F上一个次数为1的$n+1$维次子空间。

用上述方法可得高阶线性非齐次微分方程组解的结构定理，这里从略。

六、分块矩阵的几个应用

1. 用分块矩阵证明矩阵秩的性质

关于矩阵秩的性质的证明，有各种各样的方法，如用向量组的极大无关组证明，联系到齐次线性方程组的基础解系进行证明，用矩阵的初等变换证明，等等。这里充分利用分块矩阵来证明矩阵秩的一些性质，这种方法虽带有一定技巧，但并不难想；特别是，这种方法与其他方法相比，一般来说，不仅证明本身显得非常简洁，而且方法也很统一，具有较大的优越性。

下面约定A秩表示矩阵A的秩，E表示n阶单位方阵，E_s表示s阶单位方阵。

先把后面要用到的简单而基本的事实，作为四个引理写在下面。

引理 1 矩阵乘积的秩不大于每个因子的秩，两个矩阵中有一个是可逆矩阵时，它们乘积的秩等于另一因子的秩。

引理 2 A秩$+B$秩$\leq \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$秩．

引理 3 $\begin{pmatrix} AB & C \\ B & 0 \end{pmatrix}$秩$=\begin{pmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{pmatrix}$秩；特别有

$$\begin{pmatrix} A & C \\ E & 0 \end{pmatrix}秩=\begin{pmatrix} 0 & C \\ E & 0 \end{pmatrix}秩.$$

事实上，我们有$\begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AB & C \\ B & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，再利用引理 1 即得上 述结果。

引理4 在一个分块矩阵中，若把每个块看成 一 个 元素，则进行通常的初等变换仍不改变矩阵的秩。

例如，对$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的第二行乘 -1 加到第一 行 便

得$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.从而有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}秩=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}秩=秩A+秩B.$$

定理 1 设A、B都是$m\times n$矩阵，则

$(A+B)$秩$\leq A$秩$+B$秩.

证明 因为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

于是由引理2、1及4，得

$$(A+B)\text{秩}=\begin{pmatrix}A+B & 0\\ B & 0\end{pmatrix}\text{秩}$$

$$\leq\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & B\end{pmatrix}\text{秩}=A\text{秩}+B\text{秩}.$$

即得$(A+B)B$秩$\leq A$秩$+B$秩.

定理2 设A、B都是$m\times n$矩阵，则

A秩$-B$秩$\leq(A-B)$秩.

证明 据定理1，

$$A\text{秩}=[(A-B)+B]\text{秩}$$

$$\leq(A-B)\text{秩}+B\text{秩}.$$

从而得A秩$-B$秩$\leq(A-B)$秩。

定理3 设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times s$矩阵，且$AB=0$，则

A秩$+B$秩$\leq n$.

证明 由于$AB=0$，故有

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & 0\\ E & B\end{pmatrix}$$

于是由引理2、1及4得

$$A\text{秩}+B\text{秩}\leq\begin{pmatrix}A & 0\\ E & B\end{pmatrix}\text{秩}$$

$$\leq\begin{pmatrix}A & 0\\ E & 0\end{pmatrix}\text{秩}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ E & 0\end{pmatrix}\text{秩}=n,$$

从而A秩$+B$秩$\leq n$.

定理4 设A是n阶方阵，且$A^2=E$，则

$$(A+E)\text{秩}+(A-E)\text{秩}=n.$$

证明 由于$A^2=E$，$(A+E)(A-E)=0$.故由定理3得

$$(A+E)\text{秩}+(A-E)\text{秩}\leq n.$$

另方面由定理1又得

$$n=(2A)\text{秩}=[(A+E)+(A-E)]\text{秩}.$$
$$\leq(A+E)\text{秩}+(A-E)\text{秩}.$$

从而有$(A+E)\text{秩}+(A-E)\text{秩}=n$.

定理5 设A为n阶方阵，且$A^2=A$，则

$$A\text{秩}+(A-E)\text{秩}=n$$

证明 由于$A^2=A$，故$A(A-E)=0$，从而由定理3得

$$A\text{秩}+(A-E)\text{秩}\leq n.$$

另方面，由于$(A-E)\text{秩}=(E-A)\text{秩}$，故由定理 1 又得

$$n=E\text{秩}=[A+(E-A)]\text{秩}$$
$$\leq A\text{秩}+(E-A)\text{秩}=A\text{秩}+(A-E)\text{秩}.$$

从而得$A\text{秩}+(A-E)\text{秩}=n$.

定理6（*Sylvester*定律） 设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times s$矩阵，则

$$(AB)\text{秩}\geq A\text{秩}+B\text{秩}-n.$$

证明 因为

$$\begin{pmatrix} A & AB \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & -E_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ E & B \end{pmatrix}$$

于是由引理2、1及3得

$$A\text{秩}+B\text{秩}\leq\begin{pmatrix}A & 0\\E & B\end{pmatrix}\text{秩}$$

$$\leq\begin{pmatrix}A & AB\\E & 0\end{pmatrix}\text{秩}=\begin{pmatrix}0 & AB\\E & 0\end{pmatrix}\text{秩}$$

$$=(AB)\text{秩}+E\text{秩}=(AB)\text{秩}+n。$$

从而有(AB)秩$\geq A$秩$+B$秩$-n$。

定理7（Frobenius不等式） 设A、B及C依次是$m\times n$，$n\times s$，$s\times t$矩阵，则

(ABC)秩$\geq(AB)$秩$+(BC)$秩$-B$秩。

证明 因为

$$\begin{pmatrix}AB & ABC\\B & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_s & C\\0 & -E_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AB & 0\\B & BC\end{pmatrix},$$

于是由引理2、1及3得

$$(AB)\text{秩}+(BC)\text{秩}\leq\begin{pmatrix}AB & 0\\B & BC\end{pmatrix}\text{秩}$$

$$=\begin{pmatrix}AB & ABC\\B & 0\end{pmatrix}\text{秩}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & ABC\\B & 0\end{pmatrix}\text{秩}$$

$$=(ABC)\text{秩}+B\text{秩}。$$

从而得(AB)秩$+(BC)$秩$-B$秩$\leq(ABC)$秩。

定理8 设A、B都是n阶方阵，则

$(AB-E)$秩$\leq(A-E)$秩$+(B-E)$秩。

证明 因为

$$\begin{pmatrix} A-E & B-E \\ 0 & B-E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB-E & 0 \\ B-E & 0 \end{pmatrix},$$

于是由引理1及4得

$$(AB-E)\text{秩}\leq\begin{pmatrix} AB-E & 0 \\ B-E & 0 \end{pmatrix}\text{秩}$$

$$\leq\begin{pmatrix} A-E & B-E \\ 0 & B-E \end{pmatrix}\text{秩}$$

$$=(A-E)\text{秩}+(B-E)\text{秩}.$$

从而有$(AB-E)$秩$\leq(A-E)$秩$+(B-E)$秩。

定理9 设A、B都是n阶方阵，则

$(AB+A+B)$秩$\leq A$秩$+B$秩。

证明 因为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B+E & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB+A+B & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

于是由引理1及4得

$$(AB+A+B)\text{秩}\leq\begin{pmatrix} AB+A+B & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}\text{秩}$$

$$\leq\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}\text{秩}=A\text{秩}+B\text{秩}.$$

从而得$(AB+A+B)$秩$\leq A$秩$+B$秩。

2．用四分块矩阵求n阶行列式的值

这里主要是利用如下两个关于分块矩阵的行列式的结论，来求部分n阶行列式的值。

命题1　设A、B、C、D都是n阶矩阵，其中$|A|\neq 0$，并且$AC=CA$，则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB| .$$

证明　利用分块矩阵的乘法有

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

两边取行列式，由于

$$\begin{vmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{vmatrix}=1,$$

再注意到$AC=CA$　可知

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}$$

$$=|A|\ |D-CA^{-1}B|$$

$$= |AD - ACA^{-1}B|$$

$$= |AB - CB|.$$

将命题1推广可得

命题2 设

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

是一个四分块n阶方阵，其中A、B、C、D分别是$r \times r$，$r \times (n-r)$，$(n-r) \times r$，$(n-r) \times (n-r)$阶矩阵，则

（1）若A可逆，$|P| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$；

（2）若D可逆，$|P| = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|$.

命题2的证明方法与命题1类似，此略。

例1 计算

$$|P| = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \quad \prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0.$$

解　令$A=(a_0)$，$B=(1,1,\cdots 1)$，$C=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，

$D=\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}$．则 $|D|=\prod\limits_{i=1}^{n}a_i$，$D$可逆且

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}a_1^{-1}&&&\\&a_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&a_n^{-1}\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad |P|=|D|\cdot|A-BD^{-1}C|=$$

$$\prod_{i=1}^{n}a_i\left|a_0-(1,1,\cdots,1)\begin{pmatrix}a_1^{-1}&&&\\&a_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&a_n^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right|$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}\right).$$

例2　计算

$$|P|=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

解 令

$$A=\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$C=(a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2)$, $D=(a_1+x)$,

那么 $|A|=x^{n-1}$,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} & \cdots & \frac{1}{x^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{x} & \cdots & \frac{1}{x^{n-2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x} \end{pmatrix},$$

所以

$$|P| = |A| \cdot |D-CA^{-1}B|$$

$$= x^{n-1}\left| (a_1+x)+\left(\frac{a_n}{x^{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{x^{n-2}}+\cdots+\frac{a_2}{x}\right) \right|$$

$$= x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n .$$

例3 计算2*阶行列式

$$|P| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

解 令

$$A=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}=D,$$

$$B=\begin{pmatrix} & & & b \\ & & b & \\ & ⋰ & & \\ b & & & \end{pmatrix}=C.$$

则 $|P|=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|$

$$=a_n\left|\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} & & & b \\ & & b & \\ & ⋰ & & \\ b & & & \end{pmatrix}\cdot\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} a^{-1} & & & \\ & a^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & b \\ & & b & \\ & ⋰ & & \\ b & & & \end{pmatrix}\right|$$

$$=a^n\begin{vmatrix} a-b^2a^{-1} & & & \\ & a-b^2a^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-b^2a^{-1} \end{vmatrix}$$

$$=a^n(a-b^2a^{-1})^n=(a^2-b^2)^n.$$

可以看出，在使用命题2计算n阶行列式时，关键在于A与D的选择。这需要在计算时灵活掌握。对有些行列式的计算，命题2的两个结论交替使用比较方便，必要时可对题目所给的行列式适当变形，则A与D的选择更加明显。

例4 计算

$$|P|=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

解 若令$A=(1)$，$B=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$，

$$C=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},$$

则由

$$|P|=\left|\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}(1\ \ 1\ \cdots\ 1)\right|,$$

可知 $|P| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$

$$= |D| \cdot |A - BD^{-1}C|$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left| 1 - (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} a_i^{-1} \right).$$

例5 计算

$$|P| = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

解 由于

$$|P|=\left|\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-1\\\vdots\\-1\end{pmatrix}\cdot(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\right|,$$

取$A=(1)$,

$$C=\begin{pmatrix}-1\\-1\\\vdots\\-1\end{pmatrix},\quad B=(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

$$D=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

仿例4即可得出结果：$|P|=1+\sum_{i=1}^{n}a_i$.

例6　设

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

证明

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix}$$

$$= |D| + \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} A_{ij} .$$

其中A_{ij}为$|D|$中元素a_{ij}在$|D|$中的代数余式子.

证 令$A=(1)$,$D=(a_{ij})$,

$B=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

$$C=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

则由

$$|P| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} (x_1, x_2, \cdots, x_n) \right|$$

知 $|P| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$． 从而

$$|P| = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|$$

$$= |D| \cdot \left| 1 + (x_1, x_2, \cdots, x_n) D^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= |D| \cdot \left| 1 + (x_1, x_2, \cdots, x_n) \frac{D^*}{|D|} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= |D| + \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} A_{ij}。$$

（D^*表示D的伴随矩阵）

通过上述几个例题可以看出，利用四分块矩阵求行列式的值，方法比较简单，只用到矩阵运算的基础知识。在计算时如能把行列式的性质和上述方法综合在一起使用，会使适用范围更广。

3．用分块矩阵求合同

关于矩阵求合同或二次型标准化，一般采用配方、矩阵初等变换、矩阵的正交相似等方法谋求解决。这里介绍充分利用分块矩阵的方法求矩阵合同。

引理 1 设P是一个非零的n阶实对称矩阵，那末总可以通过适当的第三种行列初等变换，即P右乘以$T_{ij}(k)$，同时左乘以$T_{ij}(k)$化为

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2' & A_4 \end{pmatrix}$$

其中A_1、A_4分别是r、s阶实对称矩阵，而$r+s=n$且A_1或A_4可逆。

证明 下面仅对于A_1可逆作出证明。

首先设$P=(p_{ij})$的第一行第一列元素不全为0，当$p_{11}\neq 0$，此时命题显然成立；如$p_{11}=0$，由已知不仿设$p_{1i}\neq 0$，则$p_{i1}=p_{1i}\neq 0$，令$B=(b_{ij})=T_{1i}(1)PT_{i1}(1)$，则$b_{11}=2p_{1i}\neq 0$，由前可知命题成立。其次设$P$的第一行、

第一列元素全为0，由已知$P\neq 0$，则P必有一元素$p_{ij}\neq 0$（$1\leq i, j\leq n$）．由于P是对称矩阵，则$p_{ij}=p_{ji}\neq 0$。令$B=(b_{ij})=T_{1j}(1)T_{1i}(1)PT_{i1}(1)T_{j1}(1)$，则$b_{11}=2p_{ij}\neq 0$．由上所述，命题成立。

引理2 设$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A'_2 & A_4 \end{pmatrix}$是一个阶$n$实对称矩阵，其中$A_1$、$A_4$分别是$r$、$s$阶实对称矩阵，$r+s=n$，且$A_1$可逆，则

$$A\cong\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4-A'_2A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}.$$

（$\cong$表示合同）．

证明 由已知得$A'_1=A_1$，且A_1^{-1}存在，则

$$\begin{pmatrix} I & -A_1^{-1}A_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A'_2 & A_4 \end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} I & -A_1^{-1}A_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_1^{-1}A_2 & I \end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A'_2 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A_1^{-1}A_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4-A'_2A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}.$$

又由于

$$\begin{vmatrix} I & -A_1^{-1}A_2 \\ 0 & I \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

则$\begin{pmatrix} I & -A_1^{-1}A_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}$可逆. 所以$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A'_2 & A_4 \end{pmatrix} \cong$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - A'_2A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}.$$

引理3 若n阶实对称矩阵$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A'_2 & A_4 \end{pmatrix}$，其中

A_1，A_4分别为r、s阶实对称方阵，$r+s=n$且A_4可逆，则

$$A \cong \begin{pmatrix} A_1 - A_2A_4^{-1}A'_2 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$$

因有

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_4^{-1}A'_2 & I \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A'_2 & A_4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_4^{-1}A'_2 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 - A_2A_1^{-1}A'_2 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$$

故引理3成立.

为说话方便，将引理2、3中引用的n阶可逆实矩阵

$$\begin{pmatrix} I & -A_1^{-1}A_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_4^{-1}A'_2 & I \end{pmatrix}$$

统称为矩阵A的合同化因子矩阵。运用引理2、3求矩阵合同时还须灵活对已知矩阵进行适当的第三种行、列变换，以求获得较理想合同化因子矩阵，最后将所使用的列初等变换矩阵与各合同化因子矩阵依次求积，便可得合同化可逆变换矩阵及与原矩阵合同的矩阵。

例1 化二次型$q(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$为标准形。

解 由已知得$q(x_1,x_2,x_3)$的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A'_2 & A_4 \end{pmatrix}.$$

其中$A_1=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_4=(0)$.

易知

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1^{-1}A_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$A'_2A_1^{-1}A_2=(-1), \quad A_4-A'_2A_1^{-1}A_2=(1).$$

所以

$$A\cong\begin{pmatrix}0&-2&0\\-2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B.$$

合同化因子矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

又

$$B\cong T_{12}(1)BT_{21}(1)=\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}C&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

令

$$C=\begin{pmatrix}-4&-2\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1&C_2\\C'_2&C_4\end{pmatrix},$$

其中$C_1=-4$，$C_1^{-1}=-\frac{1}{4}$,$C_2=-2$,$C_1^{-1}C_2=\frac{1}{2}$,

$C'_2C_1^{-1}C_2=-1$，$C_4=0$，$C_4-C'_2C_1^{-1}C_2=1$，所以

$$C \cong \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

其合同化因子矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

从而

$$A \cong \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cong \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

其可逆变换矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故经过可逆变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

后得$q(y_1, y_2, y_3) = -4y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$。

例 2 化二次型$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$为标准形。

解 由已知得$q(x_1, x_2, x_3, x_4)$的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$不可逆。为此作变换。

$$A \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B'_2 & B_4 \end{pmatrix},$$

这里 $B=T_{23}(1)AT_{32}(1)$。令

$$B_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&4\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}0&0\\2&1\end{pmatrix},$$

$$B_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},$$

则

$$B_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad B_1^{-1}B_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

$$B'_2B_1^{-1}B_2=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},B_4-B'_2B_1^{-1}B_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

所以$B\cong\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&4&0&0\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}=C$。把$C$分成四个2阶方阵，仅将$\begin{pmatrix}1&1\\1&4\end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$依照上述方法

寻求合同矩阵，而 0 阵不变，故得

$$C \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以

$$A \cong B \cong C \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

可逆变换矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故经过可逆变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ 后，$q(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + 3y_2^2 - \frac{1}{3}y_3^2 + y_4^2$。

例3 化二次型$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4$为标准型。

解 二次型q的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

可逆变换矩阵

$$T=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

则令 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$, $\quad q=y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2-y_3^2-\frac{3}{4}y_4^2$.

七、循环矩阵的性质及广义循环矩阵

如无特别说明，都假定在复数域中讨论。

1．循环矩阵的性质

复数域C上的n阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

称为n阶循环矩阵。

令

$$\xi=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

易知ξ，ξ^2，…，ξ^{n-1}，$\xi^n=I$都是n阶循环矩阵，I是n阶单位矩阵，并记$\xi^n=\xi^0=I$，则任意一个n阶循环矩阵A都可用ξ^0，ξ^1，…，ξ^{n-1}线性表示；反之，如果A可用ξ^0，ξ^1，…，ξ^{n-1}线性表示，那么A也一定是n阶循环矩阵，事实上

$A=f(\xi)$。

此处，$f(x)=a_0+a_1x\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$。

循环矩阵有下述一些性质。

性质1 若A、B都是n阶循环矩阵，那么AB也是n阶循环矩阵，且$AB=BA$

证明 设$A=a_0\xi^0+a_1\xi^1+\cdots+a_{n-1}\xi^{n-1}=f(\xi)$，$B=b_0\xi^0+b_1\xi^1+\cdots+b_{n-1}\xi^{n-1}=g(\xi)$。注意到

$\xi^{n+k}=\xi^k$，k为非负整数，

因而有

$$AB=f(\xi)g(\xi)=g(\xi)f(\xi)=h(\xi)=BA.$$

这里$h(x)$是一个不高于$n-1$次的多项式。得证。

性质2 若A是n阶循环矩阵，且A可逆，那么A^{-1}也是n阶循环矩阵。

证明 由性质1，只要能找到n阶循环矩阵$B=b_0\xi^0+b_1\xi^1+\cdots+b_{n-1}\xi^{n-1}$（$b_i$为待定常数，$i=1，2，\cdots，n-1$）使得$AB=I$即可，但

$$\begin{aligned}AB=&(a_0b_0+a_{n-1}b_1+a_{n-2}b_2+\cdots+a_1b_{n-1})\xi^0+\\&(a_1b_0+a_0b_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_2b_{n-1})\xi^1+\cdots+\\&(a_{n-1}b_0+a_{n-2}b_1+a_{n-3}b_2+\cdots+a_0b_{n-1})\xi^{n-1},\end{aligned}$$

要使$AB=I$必要且只要

$$(1)\begin{cases}a_0b_0+a_{n-1}b_1+a_{n-2}b_2+\cdots+a_1b_{n-1}=1\\a_1b_0+a_0b_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_2b_{n-1}=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n-1}b_0+a_{n-2}b_1+a_{n-3}b_2+\cdots+a_0b_{n-1}=0,\end{cases}$$

（1）是以b_i（$i=1, 2, \cdots, n-1$）为未知数，A的转置矩阵A'为系数矩阵的线性方程组，由题设

$$\det A=\det A'\neq 0.$$

从而（1）有唯一的$b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$而

$$B=b_0\xi^0+b_1\xi^1+\cdots+b_{n-1}\xi^{n-1}$$

就是A的逆矩阵，且是循环矩阵，同时也给出了A的逆矩阵的求法。

性质3 任何一个n阶循环矩阵A在复数域上都可以对角化，更进一步，必存在一个复n阶可逆矩阵δ，它使所有n阶循环矩阵同时对角化。

证明 令

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}=f(\xi).$$

$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，$\xi$同前。取全部$n$次单位根$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}$，这里$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$（$k=0, 1, \cdots, n-1$）。作矩阵

$$\delta=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \\ 1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_{n-1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

那么

$$A\delta=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_0) & f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_{n-1}) \\ \varepsilon_0 f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \cdots & \varepsilon_{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \varepsilon_0^{n-1} f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$=\delta\begin{pmatrix} f(\varepsilon_0) & & & 0 \\ & f(\varepsilon_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\varepsilon_{n-1}) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

由于$\det\delta$为Vandermonde行列式，当$k\neq l$时$\varepsilon_k\neq\varepsilon_l$，从而$\delta$可逆，而

$$\delta^{-1}A\delta=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_0) & & & 0 \\ & f(\varepsilon_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\varepsilon_{n-1}) \end{pmatrix},$$

A是任意的，从而证明了性质3的全部结论。

由性质3的证明还可使我们容易得到，A的全部特征根是$f(\varepsilon_0)$，$f(\varepsilon_1)$，$\cdots$，$f(\varepsilon_{n-1})$，而

$$\det A=f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)\cdots f(\varepsilon_{n-1})。$$

如果记δ的n个列向量为X_1，X_2，$\cdots$，X_n，

$$X_k=(\varepsilon_{k-1}^0,\ \varepsilon_{k-1}^1,\ \varepsilon_{k-1}^2,\ \cdots,\ \varepsilon_{k-1}^{n-1}),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

那么X_1，X_2，…，X_n是所有的n阶循环矩阵共同的n个线性无关的特征向量。

性质4　任一个n阶矩阵A可以对角化的充分必要条件是A与某一n阶循环矩阵相似。

证明　必要性

设A可以对角化，即存在可逆矩阵T，使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

令$f(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}$，而$\varepsilon$是一个$n$次本原单位根。设

$$\sum_{l=0}^{n-1} b_l\varepsilon_l^k=\lambda_{k+1},\quad k=0,\ 1,\ 2\cdots,\ n-1 \qquad (3)$$

线性方程组（3）的系数矩阵就是δ，由$det\delta\neq 0$知有唯一的b_0，b_1，b_2，…，b_{n-1}。

令循环矩阵$B=f(\xi)$，由性质3知

$$\delta^{-1}B\delta=\begin{pmatrix}f(\varepsilon_0) & & & 0\\ & f(\varepsilon_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\varepsilon_{n-1})\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}=T^{-1}AT,$$

故$A=T\delta^{-1}B\delta T^{-1}=(\delta T^{-1})^{-1}B(\delta T^{-1})$，即$A$与$B$相似。

充分性

若A与B相似，B是n阶循环矩阵，由性质3，B与一个对角阵C相似，由相似关系的传递性知A与C相似，即A可以对角化。

性质5 任意n阶实循环矩阵A，总有实可逆矩阵T，使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \lambda_r & & & & & \\ & & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & & -b_1 & a_1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & a_m & b_m \\ 0 & & & & & & & -b_m & a_m \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中λ_1，λ_2，…，λ_r是A的实特征根，r是A的实特征根的个数（重根按重数计算），$r\geq1$，$m=\frac{1}{2}(n-r)$，a_k、b_k是实数，$k=1$，2，…，m。

证明 设$A=f(\xi)$，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，$a_0$，$a_1$，…，$a_{n-1}$是实数，那么$A$的全部特征根为

$f(\varepsilon_0)$，$f(\varepsilon_1)$，…，$f(\varepsilon_{n-1})$，

由于$f(\varepsilon_0)=f(1)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k$是实数，故$r\geq1$。又复根总

是成对出现，除去A的r个实特征根外。于是$n-r$是偶数，记$m=\frac{1}{2}(n-r)$，设A的n个特征根为$\lambda_1, \cdots, \lambda_r, \cdots, \lambda_n$。使$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$是实特征根，而后$n-r$个是复特征根，且$\lambda_{r+2k+2}$与$\lambda_{r+2k+1}$共轭（$k=0, 1, \cdots, m$）。$X_1, \cdots, X_r, \cdots, X_n$是与之相对应的特征向量。于是

$$A(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

$$=(X_1, X_2, \cdots, X_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

令$Y_l=X_l, l=1, 2, \cdots, r$；$Y_{r+2k+1}=X_{r+2k+1}+X_{r+2k+2}$；$Y_{r+2k+2}=-i(X_{r+2k+1}-X_{r+2k+2})$；$\lambda_{r+2k+1}=a_{k+1}+b_{k+1}i$；$\lambda_{r+2k+2}=a_{k+1}-b_{k+1}i$，$k=0, 1, \cdots, m$，$a_{k+1}$，$b_{k+1}$为实数。 （5）

由于A是实矩阵，对应于它的实特征根的特征向量是实向量，而对于共轭特征根的特征向量也是共轭的，故$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$都是实向量且线性无关，这样

$$A(Y_1, Y_2, \cdots Y_r, Y_{r+1}, Y_{r+2}, \cdots, Y_{n-1}, Y_n)$$

$$=(AY_1, \cdots, AY_r, AY_{r+1}, AY_{r+2}, \cdots, AY_{n-1}, AY_n)$$

$$=(\lambda_1 Y_1 \cdots, \lambda_r Y_r, a_1 Y_{r+1}-b_1 Y_{r+2}, b_1 Y_{r+1}+a_1 Y_{r+2}, \cdots, a_m Y_{n-1}-b_m Y_n, b_m Y_{n-1}+a_m Y_n)$$

$$=(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & -b_1 & a_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & a_m & b_m \\ 0 & & & & & -b_m & a_m \end{pmatrix},$$

令$T=(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$，$T$可逆，将上式两端各左乘$T^{-1}$即得（4）式。

对于实循环对称矩阵，还有更好的结果

性质6 对任意正整数n，总存在一个n阶实正交矩阵T_n，使所有n阶实循环对称矩阵同时对角化。

证明 设$A=f(\xi)$，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$是实数，而$A$对称，故$a_k=a_{n-k}$。从而$f(\varepsilon_k)=f(\overline{\varepsilon_k})=f(\varepsilon_{n-k})$即$A$的特征根都是实数，又由$n$次单位根的性质，对普通内积来说，易知$\langle X_i, X_j\rangle=0$，$i\neq j$。对非实向量$X_i$仍有$\langle X_i, X_k\rangle=0$，再注意到$X_{k+1}=\overline{X}_{n-k+1}$，$k=1, 2, \cdots, n-1$。这样，性质5的证明中那些$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$在现在的假设下都是$A$的特征向量，直接计算还知道$\langle Y_i, Y_j\rangle=0$，$i\neq j$。即它们两两正交，最后将它们标准化，取

$$\alpha_k=\frac{Y_k}{|Y_k|}, \quad k=1, 2, \cdots, n.$$

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)=(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n)$$

$$=\left(\frac{AY_1}{|Y_1|}, \frac{AY_2}{|Y_2|}, \cdots, \frac{AY_n}{|Y_n|}\right)$$

$$=\left(\lambda_1\frac{Y_1}{|Y_1|}, \lambda_2\frac{Y_2}{|Y_2|}, \cdots, \lambda_n\frac{Y_n}{|Y_n|}\right)$$

$$=(\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n)$$

$$=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

记$T_n=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是正交矩阵，且

$$T_n^{-1}AT_n=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

根据性质6的证明，可以给出T_2至T_6的具体形状。

$$T_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\quad T_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$T_4=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$
T_5=\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 \\
\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}} & -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}} \\
\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{10}} & -\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}} \\
\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{10}} & -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}} \\
\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{10}} & -\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}} & -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{10}} & -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}}
\end{pmatrix}
$$

$$
T_6=\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\
\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\
\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\
\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2}
\end{pmatrix}
$$

$n>6$时，T_n的元素一般用三角函数表示。

2．广义循环矩阵

如上所述，A_0是一个n阶循环矩阵必要且只要A_0由ξ^0，ξ^1，…，ξ^{n-1}生成：$A_0=a_0\xi^0+a_1\xi^1+\cdots+a_{n-1}\xi^{n-1}$。就是说给了$n$个复数$a_0$，$a_1$，…，$a_{n-1}$和$n$阶置换矩阵$\xi$恰能定义一个$n$阶普通循环矩阵。仿此，引进初等循环矩阵的概念。

定义1　一个$n\times n$的置换矩阵ζ，如果是且仅是n次方等于n阶单位方阵，就称ζ为一个n阶初等循环子。

为方便，称ξ为n阶标准循环子。

定义2　设ζ是一个n阶初等循环子，a_0，a_1，…，a_n是复数，方阵

$$A=a_0\zeta^0+a_1\zeta^1+\cdots+a_{n-1}\zeta^{n-1}$$

叫做一个n阶初等循环矩阵，或称为n阶ζ循环矩阵。A也简记为$A=f(\zeta)$，这里$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$。

例如，令四阶初等循环子

$$\zeta=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

那么$a_0\zeta^0+a_1\zeta^1+a_2\zeta^2+a_3\zeta^3=\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_3&a_2\\a_3&a_0&a_2&a_1\\a_1&a_2&a_0&a_3\\a_2&a_3&a_1&a_0\end{pmatrix}$就是

一个四阶的初等循环矩阵。

为方便，由n阶标准循环子所定义的矩阵叫做标准循环矩阵，而且它的元素如果是用a_0，a_1，…，a_{n-1}表示的，就以相应的大写字母A_0表示。类似地，n阶初等循环矩阵它的元素如果是用a_0，a_1，…，a_{n-1}表示的，就以A表示。

易知，n个数字的所有n阶轮换作成的集合与所有n阶初等循环子所作成的集合间，存在一一映射，或者说它们是互相唯一确定的（参见G·伯克霍夫，S·麦克莱恩著，王连祥，徐广善译《近世代数概论》）。

引理1 对换n个数字的轮换$(i_1\cdots i_a\cdots i_b\cdots i_n)$的两个数字$i_a$与$i_b$所得的轮换$(i_1\cdots i_b\cdots i_a\cdots i_n)$确定的$n$阶初等循环子，是对轮换$(i_1\cdots i_a\cdots i_b\cdots i_n)$所确定的$n$阶初等循环子施行与$i_a$行$i_b$行交换，再施行$i_a$列与$i_b$列交换的结果。

引理2 n阶初等循环矩阵A可逆的充分必要条件是n阶标准循环矩阵A_0可逆。

证明 设定义A的初等循环子ζ是轮换$(i_1 i_2\cdots i_n)$所确定。因为轮换$(i_1 i_2\cdots i_n)$可以由轮换$(1\ 2\ \cdots\ n)$经有限次对换得到，假设是经t次对换得到的。据引理1，对$(1\ 2\cdots n)$确定的标准循环子ξ施行相应的行交换，再施行相应的列交换，便可得到ζ，而这一过程等于对ξ左乘t个换法初等矩阵P_1，P_2，…，P_t和右乘以P_1，P_2，…，P_t即

$$\zeta=P_1\cdots P_t\xi P_1P_2\cdots P_t.$$

因为$P_i=P_i^{-1}$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ t$）。记$P=P_1P_2\cdots P_t$，则$\zeta=P^{-1}\xi P$，于是

$$\zeta^k=P^{-1}\xi^kP,\quad 0\le k\le n-1.$$

从而

$$A = a_0\zeta^0 + a_1\zeta^1 + \cdots + a_{n-1}\zeta^{n-1}$$

$$= P^{-1}(a_0\xi^0 + a_1\xi^1 + \cdots + a_{n-1}\xi^{n-1})P = P^{-1}AP.$$

由于P可逆，故A可逆的充要条件是A_0可逆。

据引理2的证明，立即可得

引理3 任一n阶初等循环子ζ与n阶标准循环子ξ，必定相似，即有可逆矩阵P使

$$\zeta = P^{-1}\xi P.$$

并且P还使ζ循环矩阵A与标准循环矩阵A_0也有相似关系

$$A = P^{-1}A_0P,$$

这里P是有限个换法初等矩阵的乘积。

有了以上准备，就可证明初等循环矩阵（ζ循环矩阵）类似于标准循环矩阵的六条性质。

性质1 若A，B都是n阶ζ循环矩阵，则AB也是n阶ζ循环矩阵，而且$AB = BA$。

性质2 若A是可逆的n阶ζ循环矩阵，则A^{-1}也是n阶ζ循环矩阵，并且若$A_0^{-1} = b_0\xi^0 + b_1\xi^1 + \cdots + b_{n-1}\xi^{n-1}$，则$A^{-1} = b_0\zeta^0 + b_1\zeta^1 + \cdots + b_{n-1}\zeta^{n-1}$。

性质3 任何n阶初等循环矩阵A在复数域上总可以对角化，进一步，必存在一个n阶可逆矩阵Y，它使所有的n阶ζ循环矩阵同时对角化。

性质4 任一n阶矩阵C可以对角化的充分必要条件是，C与某一个n阶ζ循环矩阵相似。

性质5 任意n阶实初等循环矩阵A，总有n阶实可逆矩阵T使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} \lambda_0 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_s & & & & & \\ & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & -b_1 & a_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_m & b_m \\ 0 & & & & & & -b_m & a_m \end{pmatrix},$$

其中λ_1，λ_2，…，λ_s是A的实特征根，s是实特征根的个数（重根按重数计算），$s\geq 1$，$m=\frac{1}{2}(n-s)$，a_k，b_k都是实数，$k=1, 2, \cdots, m$。

性质6 对任意正整数n，总存在一个正交矩阵T，使所有n阶实ζ循环对称矩阵同时对角化。

证明上述性质，所用的方法类似于对标准循环矩阵作的证明。所以这里只对个别性质作部分证明。

性质2的证明：因为A可逆，据引理2知A_0可逆，且$A=P^{-1}A_0P$，而由标准循环矩阵的性质2可得A_0^{-1}也是n阶标准循环矩阵，于是可设

$$A_0^{-1}=b\xi^0+b_1\xi^1+\cdots+b_{n-1}\xi^{n-1},$$

因而

$$A^{-1}=P^{-1}A_0^{-1}P=P^{-1}(b_0\xi^0+b_1\xi^1+\cdots+b_{n-1}\xi^{n-1})P,$$

再由引理3知，$\zeta^k=P^{-1}\xi^kP$，由此得$\xi^k=P\zeta^kP^{-1}$，$k=0, 1, \cdots, n-1$。因此，

$$A^{-1}=P^{-1}P(b_0\zeta^0+b_1\zeta^1+\cdots+b_{n-1}\zeta^{n-1})P^{-1}P$$
$$=b_0\zeta^0+b_1\zeta^1+\cdots+b_{n-1}\zeta^{n-1}.$$

故A^{-1}是n阶ζ循环矩阵，且A^{-1}与A_0^{-1}有所求的关系。

下证性质3　假设A是ζ循环矩阵，$A=f(\zeta)$，这里$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$。由引理3，$A=P^{-1}A_0P$，再由标准循环矩阵的性质3有

$$\delta^{-1}A_0\delta=\delta^{-1}PAP^{-1}\delta=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_0) & & & 0 \\ & f(\varepsilon_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\varepsilon_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

其中ε_0，…，ε_{n-1}是n次单位根。令$Y=P^{-1}\delta$，则

$$Y^{-1}AY=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_0) & & & 0 \\ & f(\varepsilon_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\varepsilon_{n-1}) \end{pmatrix},$$

即A被对角化。

由于P不依赖于A的元素a_0，a_1，…，a_{n-1}以及

$$\delta=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \\ 1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_{n-1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

故Y把任何n阶ξ循环矩阵同时对角化。

下面把循环矩阵的概念推广到更一般的情形——广义循环矩阵，同样可以证明广义循环矩阵有类似于前面的六个性质。为此也要建立一些引理，由于这些性质及引理与前面的性质及引理的叙述和证明变化不大，因此对于它们不再列出。

定义1° 一个$m=kn$（k、n是自然数）阶的置换方阵，如果是且只是n次方等于m阶单位方阵，就叫做一个m阶广义循环子，或m—n循环子。

例如

$$\beta=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是一个6—3循环子。

由n阶标准循环子ξ作成的$m=kn$阶准对角矩阵

$$\nu=\begin{pmatrix} \xi & & & \\ & \xi & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi \end{pmatrix}\ (k\text{个})$$

叫做m阶广义标准循环子，或$m-n$标准循环子。

定义2° 设α是任一$m-n$循环子，a_0，a_1，…，a_{n-1}是复数，方阵$A_\alpha = a_0\alpha^0 + a_1\alpha^1 + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$叫做一个$m$阶广义循环矩阵，或$m-n$循环矩阵。$A_\alpha$也简记为$A_\alpha = f(\alpha)$，这里$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$。

例如，由上面的6—3循环子β所定义的广义循环矩阵为

$$a_0\beta^0 + a_1\beta^1 + a_2\beta^2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix},$$

而由m阶广义标准循环子ν所定义的循环矩阵为准对角矩阵

$$a_0\nu^0 + a_1\nu^1 + \cdots + a_{n-1}\nu^{n-1} = \begin{pmatrix} A_0 & & & \\ & A_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_0 \end{pmatrix} k\text{个} = A_\nu$$

其中A_0是n阶标准循环矩阵，A_ν叫做广义标准循环矩阵。

显然，当$k=1$时，$m=n$阶广义循环子就是初等循环子，而广义循环矩阵就是初等循环矩阵。因此，广义循环矩阵包含初等循环矩阵为其特殊情况。

关于广义循环矩阵的类似性质及其证明留给读者自行练习。

八、关于正定实对称矩阵几个不等式的证明

这里，我们将采用不同方法，对正定实对称矩阵的几个不等式予以证明，同时还得到了*Minkowski*不等式的一种推广形式。

定理 1 设A，B是$n\times n$阶正定实对称矩阵，则对任意正数λ，μ，有$\lambda|A|^{\frac{1}{n}}+\mu|B|^{\frac{1}{n}}\leq|\lambda A+\mu B|^{\frac{1}{n}}$，等号成立当且仅当$A=kB$（$k>0$）时才成立。

在证明该定理之前，我们引进一个关于两组正数的不等式：

设x_i，$y_i>0$（$i=1$，2，…，n），则有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}$$

$$\leq\sqrt[n]{(x_1+y_1)\cdots(x_n+y_n)},\qquad (1)$$

等号成立的充要条件是$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\cdots=\frac{x_n}{y_n}$。

利用数学归纳法可证明这个不等式，这里略去证明。

利用不等式（1），对定理1证明如下：

证明 由于A，B正定，则必有n阶实可逆方阵C，使

$C'AC$和$C'BC$同时成对角形矩阵，也可引进另一可逆矩阵$Q=C^{-1}$，把A，B写成

$$A=Q'\begin{pmatrix}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{pmatrix}Q, \qquad B=Q'\begin{pmatrix}b_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & b_n\end{pmatrix}Q,$$

其中Q'是Q的转置矩阵。易知a_i，$b_i>0$（$i=1$，$2\cdots$，n），此时

$$\lambda A+\mu B=Q'\begin{pmatrix}\lambda a_1+\mu b_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda a_n+\mu b_n\end{pmatrix}Q.$$

再分别计算各矩阵的行列式的值，

$$\lambda|A|^{\frac{1}{n}}+\mu|B|^{\frac{1}{n}}=|Q|^{\frac{2}{n}}\lambda\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$

$$+|Q|^{\frac{2}{n}}\mu\sqrt[n]{b_1\cdots b_n}$$

$$=|Q|^{\frac{2}{n}}\left(\sqrt[n]{(\lambda a_1)\cdots(\lambda a_n)}\right.$$

$$\left.+\sqrt[n]{(\mu b_1)\cdots(\mu b_n)}\right),$$

$$|\lambda A+\mu B|^{\frac{1}{n}}=|Q|^{\frac{2}{n}}\sqrt[n]{(\lambda a_1+\mu b_1)\cdots(\lambda a_n+\mu b_n)}.$$

对比（1）式即得定理1中的不等式，而等号成立当且仅当所有的（λa_i）/μb_i）全相等，这时必有$k>0$，使$a_i/b_i=k$，故等号成立时必有$A=kB$，反之亦然。定理1得证。

特别地，当$\lambda=\mu=1$时，有

$$|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}\leq|A+B|^{\frac{1}{n}}.$$

推论 设A_j（$j=1,2,\cdots,m$）都是$n\times n$阶正定实对称矩阵，则对任意正数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，有

$$\lambda_1|A_1|^{\frac{1}{n}}+\cdots+\lambda_m|A_m|^{\frac{1}{n}}\leq|\lambda_1A_1+\cdots+\lambda_mA_m|^{\frac{1}{n}}.$$

等号成立当且仅当任意两个矩阵A_i，A_j相差一个正数倍。

用数学归纳法容易证明此推论，此从略。

定理2 设A_j，B_j（$j=1,2,\cdots,m$）都是n阶正定实对称方阵，$p<1$且$p\neq0$，则有

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|A_j+B_j|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}\geq\left(\sum_{j=1}^{m}|A_j|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{m}|B_j|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明 设q是满足条件$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$的实数（此时有$(p-1)q=p$），利用定理1及Hölder不等式得

$$\sum_{j=1}^{m} |A_j+B_j|^{\frac{p}{n}} = \sum_{j=1}^{m} |A_j+B_j|^{\frac{1}{n}} \cdot |A_j+B_j|^{\frac{p-1}{n}}$$

$$\geq \sum_{j=1}^{m} \left[|A_j|^{\frac{1}{n}} + |B_j|^{\frac{1}{n}} \right] |A_j+B_j|^{\frac{p-1}{n}}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} |A_j|^{\frac{1}{n}} |A_j+B_j|^{\frac{p-1}{n}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} |B_j|^{\frac{1}{n}} |A_j+B_j|^{\frac{p-1}{n}}$$

$$\geq \left(\sum_{j=1}^{m} |A_j|^{\frac{p}{n}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{m} |A_j+B_j|^{\frac{(p-1)q}{n}} \right)^{q}$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{m} |B_j|^{\frac{p}{n}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{m} |A_j+B_j|^{\frac{(p-1)q}{n}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left\{ \left(\sum_{j=1}^{m} |A_j|^{\frac{p}{n}} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{m} |B_j|^{\frac{p}{n}} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \cdot$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |A_j+B_j|^{\frac{p}{n}} \right)^{\frac{1}{p}},$$

用正数$\left(\sum_{j=1}^{m}|A_j+B_j|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{q}}$两边除之，并注意到$1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$，于是便得到定理2之结果，并且不难确定定理2中不等号取等号的充要条件是$A_j=kB_j$（$k>0$，$j=1,2,\cdots,m$）。

若设A_j，B_j，A_j+B_j的特征值分别是λ_{j1}，λ_{j2}，…，λ_{jn}；μ_{j1}，μ_{j2}，…，μ_{jn}；ν_{j1}，ν_{j2}，…，ν_{jn}，（$j=1,2,\cdots,m$）。其中特征值可以是重复的。则在定理2的条件下，下述不等式成立。

$$\left(\sum_{j=1}^{m}(\nu_{j1}\cdots\nu_{jn})^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}\geq\left(\sum_{j=1}^{m}(\lambda_{j1}\cdots\lambda_{jn})^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{m}(\mu_{j1}\cdots\mu_{jn})^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2)$$

事实上，由于矩阵的行列式等于它的特征值的乘积，因此$|A_j|=\lambda_{j1}\cdots\lambda_{jn}$，$|B_j|=\mu_{j1}\cdots\mu_{jn}$，$|A_j+B_j|=\nu_{j1}\cdots\nu_{jn}$，利用定理2即得不等式（2）。

在（2）中当$n=1$时，矩阵退化为一个正数，这时矩阵的特征值就是矩阵的元素，因此$\nu_{j1}=\lambda_{j1}+\mu_{j1}$（$j=1,2,\cdots,m$），不等式（2）就是

$$\left(\sum_{j=1}^{m}(\lambda_{j1}+\mu_{j1})^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\geq\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_{j1}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{m}\mu_{j1}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

这恰好是通常的$Minkowski$不等式。因此，（2）式可视为这一经典不等式的一种推广。

下面给出用数学分析，高等代数知识结合起来证明定理1的一个方法。

证明 由于A，B为n阶正定实对称方阵，λ，$\mu>0$，所以λA，μB亦为正定矩阵，且$|\lambda A|^{\frac{1}{n}}=\lambda|A|^{\frac{1}{n}}$，$|\mu B|^{\frac{1}{n}}=\mu|B|^{\frac{1}{n}}$，故只需证明

$$|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}\leq|A+B|^{\frac{1}{n}}. \qquad (3)$$

由于B为正定矩阵，故其特征值λ_1，λ_2，…，λ_n全为正实数。而由$Schur$定理知，有正交矩阵Q，使$Q'BQ=diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，即有$B=Qdiag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)Q'$。令$B_1=Qdiag(\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{2}})Q'$，则$B_1^2=B$。又$B_2=B_1^{-1}=Qdiag(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \cdots, \lambda_n^{-\frac{1}{2}})Q'$为可逆对称矩阵，由$A$正定可知$B_2AB_2$亦正定，设其特征值为$\mu_1$，$\mu_2$，…，$\mu_n$，则$\mu_i>0$（$i=1, 2, \cdots, n$）。

再由$Schur$定理，存在正交矩阵R，使得

$$R'B_2AB_2R=diag(\mu_1, \cdots, \mu_n).$$

令$P=B_2R$，则$P'=R'B_2'=R'B_2$。从而有$P'AP=diag(\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n)$，$P'BP=R'B_2BB_2R=I_n$。

在（3）式两边乘以 $|P'P|^{\frac{1}{n}}=\left(|P|^2\right)^{\frac{1}{n}}>0$，

得到 $|P'AP|^{\frac{1}{n}}+|P'BP|^{\frac{1}{n}}\leq|P'AP+P'BP|^{\frac{1}{n}}$，

即

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\mu_i\right)^{\frac{1}{n}}+1\leq\prod_{i=1}^{n}(1+\mu_i)^{\frac{1}{n}},\ \mu_i>0,(i=1,2,\cdots,n)\qquad(4)$$

若（4）式两边再乘以 $|(P'P)^{-1}|^{\frac{1}{n}}>0$，则(4)式变为（3）式。因此，（3）式与（4）式等价。下证（4）式成立。

令 $\varphi(x)=ln(1+e^x)$，则 $\varphi''(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$。

故 $\varphi(x)$ 为一下凸函数，由此知

$$\varphi\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)$$

即

$$ln\left(1+e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}ln\left(1+e^{x_i}\right),$$

于是

$$1+e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}\leq\prod_{i=1}^{n}\left(1+e^{x_i}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

今$x_i=ln\mu_i$，则$1+\left(\prod_{i=1}^{n}\mu_i\right)^{\frac{1}{n}}\leq\prod_{i=1}^{n}(1+\mu_i)^{\frac{1}{n}}$，

等号成立当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$，即$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_n=k>0$时。此时有$P'AP=kI_n$，$P'BP=I_n$，因此$A=kB$（$k>0$）。于是定理1得证。

容易得到如下推论。

1）设A，B为n（$n\geq2$）阶正定矩阵，则$|A+B|>|A|+|B|$。

证明 ∵$\mu_i>0$（$i=1, 2, \cdots, n$）（μ_i的意义同前）。

$$\therefore\prod_{i=1}^{n}(1+\mu_i)>1+\prod_{i=1}^{n}\mu_i\quad(n\geq2)$$

$$\therefore|A+B|>|A|+|B|.$$

其中A，B为n（$n\geq2$）阶正定方阵。

2，设A_j（$j=1, 2, \cdots, m$）为n（$n\geq2$）阶正定方阵，则$\left|\sum_{j=1}^{m}A_j\right|>\sum_{j=1}^{m}\left|A_j\right|$.

3）设A_j（$j=1, 2, \cdots, m$）为n（$n\geq2$）阶正定方

阵，而$\lambda_j>0$（$j=1,2,\cdots,m$），则$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j|A_j|^{\frac{1}{n}}$

$$\leq\left|\sum_{j=1}^{m}\lambda_jA_j\right|^{\frac{1}{n}},$$

等号当且仅当对任意的A_i，A_j（$i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j$），存在$k_{ij}>0$，使得$A_i=k_{ij}A_j$时成立。

下面，我们将建立一个比定理1更强的正定矩阵不等式。并约定$A>0$表示矩阵A正定，$I_\lambda=\lambda\cdot I$（$\lambda>0$）为数量矩阵；且这里所涉及到的矩阵均指n阶实矩阵。

定理3 设$A>0$，$B>0$，$|A|>|I_a|$，$|B|>|I_b|$，则

$$(|A+B|-|I_a+I_b|)^{\frac{1}{n}}\geq(|A|-|I_a|)^{\frac{1}{n}}+(|B|-|I_b|)^{\frac{1}{n}},\tag{5}$$

等号成立当且仅当$a^{-1}A=b^{-1}B$。

先证明两个引理。

引理1 设λ_i，μ_i，a，b均为正数，且$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i>a^n$，$\prod_{i=1}^{n}\mu_i>b^n$，则

$$\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda_i+\mu_i\right)-\left(a+b\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}\geq\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i-a^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$+\left(\prod_{i=1}^{n}\mu_i-b^n\right)^{\frac{1}{n}}.$$

等号成立当且仅当$\lambda_i/a=\mu_i/b$。（$i=1, 2, \cdots, n$）。

证明　令$\alpha^n=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i-a^n$，$\beta^n=\prod_{i=1}^{n}\mu_i-b^n$，则$\alpha^n+a^n=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$，$\beta^n+b^n=\prod_{i=1}^{n}\mu_i$（$\alpha, \beta>0$）则由*Minkowski*不等式（见徐利治，王兴华编著，数学分析中的方法及例题选讲（修订本）第138页）以及前述（1）式，得

$$\left[(\alpha+\beta)^n+(a+b)^n\right]^{\frac{1}{n}}\leq(\alpha^n+a^n)^{\frac{1}{n}}+(\beta^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}\mu_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda_i+\mu_i\right)\right]^{\frac{1}{n}}. \qquad (6)$$

所以，$(\alpha+\beta)^n\leq\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+\mu_i)-(a+b)^n$，即有

$$\alpha+\beta\leq\left[\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+\mu_i)-(a+b)^n\right]^{\frac{1}{n}}.$$

此即为所要证的不等式。上式成立等号，当且仅当（6）中两个等号同时成立。即$\lambda_i=p\mu_i$，$\alpha/a=\beta/b$，从而$p=a/b$，亦即$\lambda_i/a=\mu_i/b$。

引理2 设$A>0$，B为对称矩阵，则存在可逆矩阵T，且$|T|=1$，使得

$T'AT=diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，

$T'BT=diag(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$。

其中$\lambda_i>0$，$\mu_i\in R$。（$i=1, 2, \cdots, n$）。

证明 因$A>0$，故存在可逆矩阵Q，使$Q'AQ=I$；而$Q'BQ$仍为对称矩阵，故又有正交矩阵U，使$U'Q'BQU$为对角矩阵，$U'Q'AQU=U'U=I$，令$P=QU$，显然P可逆，且

$$P'AP=I, \ P'BP=diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n). \qquad (*)$$

再令$T=(|P|^{-1})^{\frac{1}{n}}P$，则$|T|=1$，注意到（*）式，即知

$T'AT=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$T'BT=diag(\mu_1,\cdots,\mu_n)$

其中$\lambda_i>0$，$\mu_i\in R$。

下面证明定理3。

因$A>0$，$B>0$，由引理2知，存在可逆矩阵T，且$|T|=1$，使得

$$T'AT=diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),$$
$$T'BT=diag(\mu_1, \cdots, \mu_n). \qquad (7)$$

其中$\lambda_i > 0$，$\mu_i > 0$，（$i=1, 2, \cdots, n$）。因此，

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad |B| = \prod_{i=1}^{n} \mu_i, \quad |A+B| =$$

$$|T'(A+B)T| = |T'AT + T'BT|$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i).$$

又因 $|I_a| = a^n$, $|I_b| = b^n$, $|I_a + I_b| = (a+b)^n$。于是不等式（5）等价于

$$\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda_i+\mu_i\right)-\left(a+b\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i - a^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$+\left(\prod_{i=1}^{n}\mu_i - b^n\right)^{\frac{1}{n}}. \qquad (8)$$

由已知条件及引理3知（8）式成立。从而定理3得证。

现讨论等号成立的充要条件。显然（5）式等号成立，当且仅当（8）式等号成立，即有

$\lambda_i/a = \mu_i/b$，代入（7）式，得

$a^{-1}T'AT = diag(\lambda_1/a, \cdots, \lambda_n/a) = diag(\mu_1/b, \cdots, \mu_n/b) = b^{-1}T'BT$。

即 $a^{-1}A = b^{-1}B$。

在（5）中令$a \to 0^+$，$b \to 0^+$，即得(3)式，故（5）实为（3）的加强。利用数学归纳法不难证得如下推论。

1） 设$A_i>0$，$|A_i|>|Ia_i|$，（$i=1$，2，…，k）。则

$$\left(\left|\sum_{i=1}^{k}A_i\right|-\left|\sum_{i=1}^{k}Ia_i\right|\right)^{\frac{1}{n}}\geq\sum_{i=1}^{k}\left(|A_i|-|Ia_i|\right)^{\frac{1}{n}}.$$

等号成立当且仅当$a_1^{-1}A_1=a_2^{-1}A_2=\cdots=a_k^{-1}A_k$。

在此1）中令$a_i\to 0^+$，即得

2） 设$A_i>0$，则

$$\left|\sum_{i=1}^{k}A_i\right|^{\frac{1}{n}}\geq\sum_{i=1}^{k}|A_i|^{\frac{1}{n}}.$$

等号成立当且仅当$A_1=c_2A_2=\cdots=c_kA_k$。（$c_i>0$）。

最后，我们运用这里给出的定理3，得到一道IMO试题巧妙、简捷的解答，并推广了它。

例（第11届IMO试题） 求证：对所有满足条件$X_1>0$，$X_2>0$，$X_1Y_1-Z_1^2>0$，$X_2Y_2-Z_2^2>0$的所有实数X_1，X_2，Y_1，Y_2及Z_1，Z_2有不等式

$$\frac{8}{(X_1+X_2)(Y_1+Y_2)-(Z_1+Z_2)^2}\leq\frac{1}{X_1Y_1-Z_1^2}+\frac{1}{X_2Y_2-Z_2^2}\qquad(9)$$

成立，并求出等号成立的条件。

证明 由题设知，2阶实矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix}X_1 & Z_1\\ Z_1 & Y_1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}X_2 & Z_2\\ Z_2 & Y_2\end{pmatrix}$$

是正定的，且原不等式等价于

$$\frac{8}{|A_1+A_2|}\leq\frac{1}{|A_1|}+\frac{1}{|A_2|}.$$

由本处推论之2）有

$$|A_1+A_2|\geq(\sqrt{|A_1|}+\sqrt{|A_2|})^2$$

$$\geq 4\sqrt{|A_1||A_2|}\geq\frac{8}{|A_1|^{-1}+|A_2|^{-1}},$$

即有

$$\frac{8}{|A_1+A_2|}\leq\frac{1}{|A_1|}+\frac{1}{|A_2|}.$$

这就是所要证的。显见上式等号当且仅当$A_1=A_2$，即$X_1=X_2$，$Y_1=Y_2$，$Z_1=Z_2$时成立。

利用定理3及本处推论，可将（9）式推广到正定矩阵的情形，即

推广1　设$A>0$，则$\dfrac{R^{n+1}}{|\sum\limits_{i=1}^{k}A_i|}\leq\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{1}{|A_i|}$。等号成立当且仅当$A_1=A_2=\cdots=A_k$。

推广2　设$A_i>0$，且$|A_i|>|Ia_i|$，则

$$\frac{R^{n+1}}{|\sum\limits_{i=1}^{k}A_i|-|\sum\limits_{i=1}^{k}Ia_i|}\leq\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{|A_i|-|Ia_i|}.$$

等号成立当且仅当$A_1=A_2=\cdots=A_k$，$a_1=a_2=\cdots=a_k$。

九、Bellman不等式的讨论及其推广

在第二次国际不等式会议上，*Bellman*宣读了他的《正定矩阵中的一些不等式》论文，该文讨论了矩阵在正定条件下的追迹的一些不等式，同时就有关问题提出了猜想。之后，就有许多同志就此问题进行了研究，先后把有些不等式推广到实对称矩阵，再推广到$n\times n$实矩阵上去，并给出了一些不等式中等号成立的充要条件。现选编几篇文章如下：

1．关于矩阵追迹的一些不等式

这里，试图就*Bellman*论文中的正定条件减弱并给出一些新的不等式。

不等式1 $tr(AB)\leq\sqrt{tr(A^2)}\cdot\sqrt{tr(B^2)}$．其中$A$，$B$是对称矩阵。

不等式2 $tr(AB)^2\leq tr(A^2B^2)$．其中A，B是实对称矩阵。

不等式1的证明仿照*Bellman*的证明方法易得，而不等式2的详细证明如下：

先证明一个结论：若A为实反对称矩阵，则$tr(A^2)\leq 0$．事实上，令$C=A^2$，其中$C=(c_{ij})_{n\times n}$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则$a_{ik}=-a_{ki}$ $(i,k=1,2,\cdots,n)$．而

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}=-\sum_{k=1}^{n}a^2{}_{ik},$$

$$trA^2=trC=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a^2{}_{ik}\leq 0.$$

下证不等式2：

$$(AB-BA)^2=(AB)^2+(BA)^2-AB^2A-BA^2B \quad (1)$$

因为A，B是实对称矩阵，所以$AB-BA$是实反对称矩阵，从而由（1）可得

$$tr(AB)^2+tr(BA)^2\leq tr(AB^2A)+tr(BA^2B) \quad (2)$$

当A，B皆为可逆矩阵时，由$AB^2A=A(B^2A^2)A^{-1}$，$BA^2B=B(A^2B^2)B^{-1}$，$(BA)^2=B(AB)^2B^{-1}$，代入（2）式即得

$$tr(AB)^2\leq tr(A^2B^2).$$

当A，B至少有一个不可逆时，以$A+\lambda E$，$B+\lambda E$代替A，B（λ取满足$|A+\lambda E|\neq 0$，$|B+\lambda E|\neq 0$的值）。同样有

$tr[(A+\lambda E)(B+\lambda E)]^2\leq tr(A+\lambda E)^2(B+\lambda E)^2$，令$\lambda\to 0$，即得

$$tr(AB)^2\leq tr(A^2B^2).$$

下面给出一些新的不等式。

不等式3 （*Minkowski*不等式）设A，B为实对称矩阵，则下不等式成立。

$$\sqrt{tr(A+B)^2}\leq\sqrt{tr(A^2)}+\sqrt{tr(B^2)}.$$

证明　因$(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA$。
所以有$tr(A+B)^2=tr(A^2)+tr(B^2)+2tr(AB)$。
由不等式1，$tr(A+B)^2\leq tr(A^2)+tr(B^2)+2\sqrt{tr(A^2)}\sqrt{tr(B^2)}=(\sqrt{tr(A^2)}+\sqrt{tr(B^2)})^2$，
即得

$$\sqrt{tr(A+B)^2}\leq\sqrt{tr(A^2)}+\sqrt{tr(B^2)}.$$

不等式4　（算术—几何平均值不等式）设A、B为实对称矩阵，则$tr(AB)\leq tr\left(\frac{A+B}{2}\right)^2$.

证明　$(A+B)^2-4AB=(A-B)^2+2BA-2AB$.
而$tr[(A-B)^2+2BA-2AB]=tr(A-B)^2+2tr(BA)-2tr(AB)=tr(A-B)^2\geq 0$。

故$tr[(A+B)^2-4AB]\geq 0$。即得

$$tr(AB)\geq tr\left(\frac{A+B}{2}\right)^s.$$

不等式5　$tr(A^2)\leq[tr(A)]^2$。　其中A为非负定矩阵。

证明　因A为非负定矩阵，则存在正交矩阵T，使$A=T^{-1}diag[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]T$，$(\lambda_i\geq 0, i=1,2,\cdots,n)$，于是$A^2=T^{-1}diag[\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2]T$，从而$tr(A^2)=$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2=[tr(A)]^2.$$

不等式6　设A、B为非负定矩阵，则$tr(AB)\leq tr(A)tr(B)$。

证明　应用不等式1与不等式5即得。

不等式7 $tr(AB)^2\leq[tr(AB)]^2$.其中A, B均为非负定矩阵。

证明 当A、B为正定矩阵时，存在可逆矩阵T_1, T_2，使得$A=T_1T_1'$, $B=T_2T_2'$, 从而$(AB)^2=T_1[(T_1'T_2)\cdot(T_1'T_2)']^2T_1^{-1}$，由不等式5得

$tr(A+B)^2=tr[(T_1'T_2)(T_1'T_2)']^2\leq$

$[tr(T_1'T_2)(T_1'T_2)']^2=[tr(AB)]^2$.

当A, B为半正定时，$A+\lambda E$, $B+\lambda E$ $(\lambda>0)$是正定的，于是$tr[(A+\lambda E)(B+\lambda E)]^2\leq[tr(A+\lambda E)(B+\lambda E)]^2$，令$\lambda\to 0$，即得$tr(AB)^2\leq[tr(AB)]^2$.

2. 关于Bellman不等式的注记

这里，首先将前述七个不等式给出等号成立的充要条件；其次将有些不等式推广到一般的情况。

先证明一个引理。

引理1 设V是一切$n\times n$实矩阵所成的集合，那么，

1）V是实数域R上的线性空间（关于矩阵的加法和数乘矩阵两种运算）；2）在V中定义

$$(A,\ B)=trA'B.\qquad \forall A,\ B\in V. \qquad (1)$$

则V关于此内积又构成R上的欧氏空间。

证明 1）（略）。

2）只要证明(A, B)是内积即可.由（1）式知(A,B)是实数.又，$\forall A, B, C\in V$, $k\in R$，由矩阵迹的性质知，

$trA'B=tr(A'B)'=trB'A$，即$(A,B)=(B,A)$，

$tr(A+B)'C=trA'C+trB'C$，即有$(A+B,\ C)=(A,\ C)+(B,\ C)$，

$tr(kA)'B = ktrA'B$，即有 $(kA,B) = k(A,B)$，设 $A=(a_{ij})\in V$，那么

$$A'A=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a^2_{i1} & & & * \\ & \sum_{i=1}^{n} a^2_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \sum_{j=1}^{n} a^2_{in} \end{pmatrix},$$

所以又有 $(A,\ A)=trA'A=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a^2_{ij}\geq 0$ 且

$(A,\ A)=0\Longleftrightarrow a_{ij}=0$，$(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\Longleftrightarrow$ $A=0$。从而 $(A,\ B)$ 是内积，V 就是 R 上的一个欧氏空间。

命题 1 （Cauchy不等式）设 A，B 是 $n\times n$ 实对称矩阵，则

$$|(A,\ B)|\leq\sqrt{(A,\ A)}\cdot\sqrt{(B,\ B)} \qquad (2)$$

当且仅当 $A=kB$ 或 $B=kA$ 时，（2）式成立等号。

证明 （略）。

命题 2 1） $trAB\leq\sqrt{trA^2}\sqrt{trB^2}$，$A$，$B$ 为实对称矩阵。 （3）

2）上式等号成立 $\Longleftrightarrow A=kB$ 或 $B=kA$ $(k\geq 0)$。

证明 1） 由命题 1 知

$$(A,B)\leq|(A,B)|\leq\sqrt{(A,A)}\sqrt{(B,B)},\quad(4)$$

由（1）式，并注意到$A'=A$，$B'=B$.得证（3）式。

2）易知（3）式成立等号

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}|(A,B)|=\sqrt{(A,A)}\sqrt{(B,B)}\\(A,B)=|(A,B)|\end{cases}$$

$\Longleftrightarrow A=kB$或$B=kA$（$k\geq0$）.

命题3 （*Minkowski*不等式）设A，B是实对称阵，则

1）$\sqrt{(A+B)^2}\leq\sqrt{trA^2}+\sqrt{trB^2}$.　　　（5）

2）上式等号成立$\Longleftrightarrow A=kB$或$B=kA$（$k\geq0$）.

证明 1）在欧氏空间中定义范数$\|A\|=\sqrt{(A,A)}=\sqrt{trA'A}$，$\forall A\in V$，以及由熟知的三角不等式$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$即得证（5）式。

2）由于$tr(A+B)^2=trA^2+trB^2+2trAB$,

$(\sqrt{trA^2}+\sqrt{trB^2})^2=trA^2+trB^2+2\sqrt{trA^2}\sqrt{trB^2}$，于是（5）式成立等号$\Longleftrightarrow trAB=\sqrt{trA^2}\sqrt{trB^2}\Longleftrightarrow A=kB$或$B=kA$（$k\leq0$）.

命题4 （几何-算术平均不等式）设A，B是实对称矩阵，那么

1）$trAB\leq tr\left(\dfrac{A+B}{2}\right)^2$.　　　（6）

2）上式成立等号$\Longleftrightarrow A=B$.

证明 1）$(A-B,\ A-B)=tr(A-B)^2=$

$tr[(A+B)^2-4AB]\geq 0$，从而$tr\left(\frac{A+B}{2}\right)^2\geq trAB$。

2）（6）式成立等号$\Longleftrightarrow(A-B, A-B)=0\Longleftrightarrow$ $A-B=0$ 即 $A=B$。

命题5 设A是$n\times n$半正定矩阵，则

1） $trA^2\leq(trA)^2$。 （7）

2） 上式等号成立$\Longleftrightarrow A$至多有一个非零特征值$\Longleftrightarrow$ 秩$(A)\leq 1$。

证明 1）首先存在正交阵T，使

$$A=T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}T^{-1}, \lambda_1,\lambda_2,\cdots,$$

λ_n为A的全部特征值，且$\lambda_i\geq 0$（$i=1,2,\cdots,n$）。那么

$$A^2=T\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2\end{pmatrix}T^{-1},$$

于是$trA^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2=(trA)^2$，

（$\because\lambda_i\geq 0$）。

2）由上式可看出成立等号$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i \right)^2$

$\Longleftrightarrow \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j = 0$，由$\lambda_i \geq 0$。所以$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_n$中至多

只能有一个不等于0，才能保证$\sum_{i \neq j}^{n} \lambda_i \lambda_j = 0$。

命题6　设A，B是半正定的，那么

1）$trAB \leq (trA)(trB)$。　　(8)

2）上式成立等号$\Longleftrightarrow A=0$或$B=0$或$A=kB$或$B=kA(k>0)$。秩(A)=秩$(B)=1$。

证明　1）由命题2和命题5可证得

$$trAB \leq \sqrt{trA^2}\sqrt{trB^2} \leq \sqrt{(trA)^2}\sqrt{(trB)^2} = (trA)(trB).$$

2）"$\Longrightarrow$"由$trAB=(trA)(trB)$，则

$$trAB = \sqrt{trA^2}\sqrt{trB^2}. \qquad (9)$$

由命题2知$A=kB$（或$B=kA$），$(k \geq 0)$。当$k=0$时，有$A=0$（或$B=0$）；当$k>0$时，将$A=kB$($B=kA$同理可证）代入（9）式，则有$ktrB^2=k(trB)^2$，于是$trB^2=(trB)^2$，从而由命题5可知B至多只能有一个非零特征值.再由$A=kB$，所以A也是。

"$\Longleftarrow$"　当$A=0$或$B=0$时，命题成立。

当A，B都仅有一个非零特征值，且$A=kB(k>0)$，

有

$$trAB = ktrB^2 = (trA)(trB).$$

$B = kA\ (k>0)$ 时同理可证。

引理 2　设 A 是 n 阶实反对称矩阵，则

1）　$trA^2 \leq 0$.　　　　(10)

2）上式成立等号 $\Longleftrightarrow A = 0$.

证明　1）令 $B = A^2 = (b_{ij})$，$A = (a_{ij})$，$a_{ik} = -a_{ki}$，那么

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki} = -\sum_{k=1}^{n} a^2{}_{ik},\quad \therefore trA^2 = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^2{}_{ik}$$

≤ 0.

2）　由 1）之证明看出 $trA^2 = 0 \Longleftrightarrow a_{ik} = 0 \Longleftrightarrow A = 0$.$(i,\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

命题 7　设 A，B 是 n 阶实对称阵，那么

1）　$tr(AB)^2 \leq trA^2B^2$.　　　　(11)

2）　上式成立等号 $\Longleftrightarrow AB = BA$.

证明　1）　$(AB-BA)^2 = (AB)^2 + (BA)^2 - AB^2A - BA^2B$，而 $AB-BA$ 为反对称矩阵，由引理 2 又有

$$0 \geq tr(AB-BA)^2 = 2tr(AB)^2 - 2trA^2B^2, \qquad (12)$$

即有 $tr(AB)^2 \leq trA^2B^2$ 成立。

2）由（12）式可见 $tr(AB)^2 = trA^2B^2 \Longleftrightarrow tr(AB-BA)^2 = 0 \Longleftrightarrow AB-BA = 0$，即有 $AB = BA$.

命题 8　设 A，B 为 n 阶正定矩阵，那么

$$tr(AB)^2 \leq (trAB)^2. \qquad (13)$$

证明　由 A，B 正定，那么，$A = TT'$，$B = QQ'$，

$(AB)^2=T[(T'Q)(T'Q)']^2T^{-1}=TC^2T^{-1}$，其中 $C=(T'Q)(T'Q)'$正定，所以

$$tr(AB)^2=trC^2\leq(trC)^2, \qquad (14)$$

$$trC=tr[T(T'Q)(T'Q)'T^{-1}]=trAB, \qquad (15)$$

将(15)式代入(14)式即得(13)式。

顺便指出，命题8是命题5的一般情况，如令$B=I$，由命题8即得命题5。

命题9 在命题8的假设及记号下，则(13)式成立等号$\Longleftrightarrow C$至多有一个非零特征值$\Longleftrightarrow$秩$(C)\leq1$。

证明 由命题8证明过程可知，(13)式成立等号$\Longleftrightarrow$ $trC^2=(trC)^2$，再由命题5即得结果。

下面我们将有些不等式推广到更一般的情况，先证明两个引理。

引理3 设A_1，A_2，…，A_s是$n\times n$矩阵，满足

1） A_i可对角化($i=1, 2, \cdots, s$)，

2） $A_iA_j=A_jA_i$($i, j=1, 2, \cdots, s$)，

那么，存在可逆阵T，使$T^{-1}A_iT$同时对角化($i=1,2,\cdots,s$)。

证明详见张远达先生编《线性代数原理》第490页。

引理4 设$A_1,A_2,\cdots,A_s$为n阶半正定矩阵，且

$$A_iA_j=A_jA_i \quad (i, j=1, 2, \cdots, s). \qquad (16)$$

那么，从$\{A_1, \cdots, A_s\}$中任取有限个(可重复)的积仍半正定。

证明 由引理3知，存在可逆矩阵T，使

$$T^{-1}A_iT=\begin{pmatrix}\lambda_1^{(i)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{(i)}\end{pmatrix}, i=1,2,\cdots,s \quad (17)$$

其中$\lambda_j^{(i)}\geq 0$ （$i=1, 2, \cdots, s, j=1, 2, \cdots, n$）。

$\forall A_{j1}, \cdots, A_{jt}\in\{A_1, \cdots, A_s\}$，由（16）式知 $(A_{j1}\cdots A_{jt})'=A_{j1}\cdots A_{jt}$，再由（17）式有

$T^{-1}(A_{j1}\cdots A_{jt})T=$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1^{(j1)}\cdots\lambda_1^{(jt)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{(j1)}\cdots\lambda_n^{(jt)}\end{pmatrix},$$

所以积$A_{j1}\cdots A_{jt}$仍是半正定的。

命题10 设$A_1, A_2, \cdots, A_s$为n阶半正定矩阵，且满足（16）式，那么

$$tr(A_1A_2\cdots A_s)\leq(trA_1)(trA_2)\cdots(trA_s). \quad (18)$$

证明 当$s=2$时，结论成立。

假设结论对$s-1$也成立，再证s时结论也成立。由引理4知积$A_1A_2\cdots A_s$半正定，$tr(A_1A_2\cdots A_s)=tr[A_1(A_2\cdots A_s)]\leq(trA_1)[tr(A_2\cdots A_s)]\leq(trA_1)(trA_2)\cdots(trA_s)$。即得（18）式。

命题11 设$A_1, A_2, \cdots, A_s$为n阶实对称阵，且满足（16），那么

$$tr(A_1A_2\cdots A_s)\leq\sqrt{trA_1^2}\sqrt{trA_2^2}\cdots\sqrt{trA_s^2}\quad(19)$$

证明　由命题2及（16）式知$tr(A_1A_2\cdots A_s)\leq$ $\sqrt{trA_1^2}\sqrt{tr(A_2\cdots A_s)^2}=\sqrt{trA_1^2}\sqrt{tr(A_2^2\cdots A_s^2)}\leq$ $\sqrt{trA_1^2}\sqrt{(trA_2^2)\cdots(trA_s^2)}=\sqrt{trA_1^2}\sqrt{trA_2^2}\cdots$ $\sqrt{trA_s^2}$。

命题12　设A_1，A_2，…，A_s是n阶实对称矩阵，则

$$\sqrt{tr(A_1A_2\cdots A_s)^2}\leq\sqrt{trA_1^2}+\cdots+\sqrt{trA_s^2}.\quad(20)$$

证明　由命题3直接可证。

命题13　设$A_1,A_2,\cdots,A_s$均正定，且满足（16）式，则

$$tr(A_1A_2\cdots A_s)^2\leq(trA_1A_2\cdots A_s)^2.$$

证明　由引理4知$A_1A_2\cdots A_s$也是正定的，从而直接由命题8可证得结论。

3．Bellman不等式的推广及Bellman的一个猜想

下面，我们将在前述不等式的基础上，把这些结论推广到n阶实方阵上去。

不难证明

引理1　$R^{n\times n}$表示一切$n\times n$实方阵全体，那么关于矩阵加法，数乘矩阵以及内积$\langle A,B\rangle=trA'B$，$\forall A,B\in R^{n\times n}$构成实数域$R$上的欧氏空间。

引理2　设V是欧氏空间，那么，$\forall\alpha,\beta\in V$，$k\in R$，

有（i）$\|k\alpha\| = |k|\,\|\alpha\|$，（ii）$|\langle\alpha, \beta\rangle| \le \|\alpha\|\,\|\beta\|$，（iii）$\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$，其中$\|\alpha\| = \sqrt{\langle\alpha, \alpha\rangle}$称为欧氏范数，$\langle\alpha, \beta\rangle$为内积记号。

引理3 设$A' = A \in R^{n\times n}$，$B' = B \in R^{n\times n}$，那么等式$trAB = \sqrt{trA^2}\ \sqrt{trB^2}$成立的充要条件为$A = kB$或$B = kA$，其中$k \ge 0$。

在$R^{n\times n}$上，我们证明矩阵迹的一些不等式。

定理1 设A，$B \in R^{n\times n}$，则有

$$trAB \le \sqrt{trAA'} \cdot \sqrt{trBB'}, \tag{1}$$

且等号成立的充要条件为$A = kB'$或$B = kA'$，而$k \ge 0$。

证明 显然，$trAB = \langle A', B\rangle \le |\langle A', B\rangle| = |trAB| \le \sqrt{trAA'} \cdot \sqrt{trBB'}$，（1）式证得。

由于$|trAB| = \sqrt{trAA'} \cdot \sqrt{trBB'} \Leftrightarrow A' = kB$或$B = kA' \Leftrightarrow A = kB'$或$B = kA'$，而在$A = kB'$或$B = kA'$条件下$trAB = |trAB| \Leftrightarrow k \ge 0$，故（1）式等号成立当且仅当$A = kB'$或$B = kA'$（$k \ge 0$）。

特别当A，B均为实对称阵时，有$trAB \le \sqrt{trA^2} \cdot \sqrt{trB^2}$，且等号成立$\Leftrightarrow A = kB$或$B = kA$（$k \ge 0$）。

由定理1容易证明

定理2 设$A \in R^{n\times n}$，则$trA^2 \le trAA'$，且等号成立$\Leftrightarrow A = A'$。

定理3 设$A, B \in R^{n\times n}$，则$tr(AB)^2 \le tr(AB)(AB)' = trA'ABB'$，且等号成立$\Leftrightarrow AB = (AB)'$。

这是定理2的特例。特别当A，B都是实对称阵时，有$tr(AB)^2 \le trA^2B^2$，且等号成立$\Leftrightarrow AB = BA$。

定理4 设A，$B \in R^{n\times n}$，则

$$tr(A+B)^2 \leq (\sqrt{trAA'}+\sqrt{trBB'})^2 \quad (2)$$

且等号成立$\Longleftrightarrow$1) $A=A'$，2) $B=B'$，3) $A=kB$或$B=kA$（$k\geq 0$）同时成立。

证明 因为$tr(A+B)^2=trA^2+trB^2+2trAB\leq trAA'+trBB'+2\sqrt{trAA'}\cdot\sqrt{trBB'}$，所以$tr(A+B)^2\leq(\sqrt{trAA'}+\sqrt{trBB'})^2$．即(2)式证得．其次

$$(2)\text{式等号成立}\begin{cases} trA^2=trAA' \Longleftrightarrow A=A', \\ trB^2=trBB' \Longleftrightarrow B=B', \\ trAB=\sqrt{trAA'}\sqrt{trBB'}\Longleftrightarrow \\ A=kB\text{或}B=kA\ (k\geq 0). \end{cases}$$

特别，当A，B是实对称阵时，有$\sqrt{tr(A+B)^2}\leq\sqrt{trA^2}+\sqrt{trB^2}$，且等号成立$\Longleftrightarrow A=kB$或$B=kA$（$k\geq 0$）．

定理5 设A，$B\in R^{n\times n}$，则

$$trAB\leq tr\left(\frac{A'+B}{2}\right)\left(\frac{A+B'}{2}\right), \quad (3)$$

且等号成立$\Longleftrightarrow A=B'$．

证明 因$tr(A'+B)(A+B')=trA'A+trB'B+2trAB$，所以有$tr(A'+B)(A+B')-4trAB\geq(\sqrt{trA'A}-\sqrt{trB'B})^2\geq 0$．即（3）式得证。下证等号成立的充要条件是$A=B'$．

充分性显然，只证必要性．从证明（3）式的过程中知，等号成立，就有

$$trAB=\sqrt{trA'A}\sqrt{trBB'}, \quad (4)$$

$$trA'A=trB'B. \quad (5)$$

由（4）式和定理1，容易得到$A=B'$．

特别地，当A，B均为实对称阵时，有$trAB\leq$

$$tr\left(\frac{A+B}{2}\right)^2，且等号成立\Leftrightarrow A=B。$$

为了把这些结果推广到有限多个上去，下 面再 看 两 个引理。

引理4 设A，B半正定，则

$$trAB\leq(trA)(trB)。 \qquad (6)$$

引理5 设$A_i\in R^{n\times n}$（$i=1，2，\cdots，m$），则

$$tr(A_1A_2\cdots A_m)(A_1A_2\cdots A_m)'\leq\prod_{i=1}^{m}trA_iA'_i。$$

定理6 设$A_i\in R^{n\times n}$（$i=1，\cdots m$），那么

$$trA_1A_2\cdots A_m\leq\prod_{i=1}^{m}\sqrt{trA_iA'_i}\ (m\geq2)。 \qquad (7)$$

证明 由（1）式和引理5即可得到上述结果。

特别地，有

推论1 设$A\in R^{n\times n}$，则

$$trA^s\leq(\sqrt{trAA'})^s\ （s为自然数，s\geq2）。 \qquad (8)$$

定理7 设$A_i\in R^{n\times n}$（$i=1,2,\cdots,m$）。那么

$$tr(A_1A_2\cdots A_m)^s\leq\prod_{i=1}^{m}(\sqrt{trA_iA'_i})^s， \qquad (9)$$

其中s为自然数，且$max(s，m)\geq2$。

证明 由(8)式和(7)式可得。

定理8 设$n\times n$矩阵A_i半正定（$i=1,2,\cdots，m$），

那么

$$tr(A_1A_2\cdots A_m)^s \leq \left(\prod_{i=1}^{m} trA_i\right)^s \qquad (10)$$

其中s为自然数，且$max(m, s) \geq 2$。

证明　由(9)式和(6)式可得。

由定理8可得引理5的推广。

推论2　在定理8的假设下，有

$$trA_1A_2\cdots A_m \leq \prod_{j=1}^{m} trA_i，其中m \geq 2。$$

证明　在(10)式中取s=1即得。

定理9　设$A_i \in R^{n\times n}(i=1, 2, \cdots, m)$，则

$$tr\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right)^s \leq \left(\sum_{i=1}^{m}\sqrt{trA_iA_i'}\right)^s，$$ 其中s为

自然数，且$s \geq 2$。

证明　由(8)式得

$$tr\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right)^s \leq \left(\sqrt{tr(\sum A_i)(\sum A_i)'}\right)^s$$

$$\leq \left[\left(\sum_{i,j=1}^{m}\sqrt{trA_iA'_i}\sqrt{trA_jA'_j}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^s =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\sqrt{trA_iA_i'}\right)^{2}.$$

根据推论2，可以证明对于同阶数的有限个非负定矩阵，其几何算术平均值无条件地成立，同时还可证明等号成立的条件，于是$Bellman$的猜想得到彻底解决。

定理10（几何算术平均不等式） 设A_i（$i=1, 2, \cdots, m$）为非负定矩阵，则

$$tr\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)\geq\sqrt[m]{trA_1A_2\cdots A_m}. \tag{11}$$

证明 由数的几何-算术平均不等式我们有

$$tr\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}trA_i\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{m}trA_i\right)^{\frac{1}{m}},$$

再由推论2得

$$tr\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)\geq\sqrt[m]{trA_1A_2\cdots A_m}.$$

定理11 在(11)式中等号成立$\Longleftrightarrow A_1=A_2=\cdots=A_m$，且$rk(A_i)\leq 1$（$i=1, 2, \cdots, m$）。

我们先引入下述引理，再证明本定理。

引理7 设$A_i\in R^{n\times n}$，且均非零阵，若

$tr(A_1A_2\cdots A_m)(A_1A_2\cdots A_m)'=trA_1A_1'\ trA_2A_2'\cdots trA_mA_m'$，

则$rk(A_iA_i')=1$（$i=1, 2, \cdots, m$），且$A_jA_j'=k_jA_mA'_m$，其中$k_j>0$（$j=1, 2, \cdots, m-1$）。

证明 显然有

$tr(A_1A_2\cdots A_m)(A_1A_2\cdots A_m)'\leq trA_1'A_1(A_2\cdots A_m)(A_2\cdots A_m)'\leq trA_1'A_1tr(A_2\cdots A_m)(A_2\cdots A_m)'\leq trA_1'A_1trA_2'A_2\cdots trA'_{m-1}A_{m-1}trA'_mA_m$。

由题设，上述不等式中各等号均成立，由最后一个不等式及引理4得

$rk(A'_{m-1}A_{m-1})=rk(A'_mA_m)=1$ 且 $A'_{m-1}A_{m-1}=k_{m-1}A'_mA_m$ （$k_{m-1}>0$）。

又

$tr(A_1A_2\cdots A_m)(A_1A_2\cdots A_m)'=tr(A_1A_2\cdots A_{m-1})'(A_1A_2\cdots A_{m-1})A_mA'_m\leq trA_1A'_1\cdots trA_{m-1}A'_{m-1}trA_mA'_m$

根据题设，上述等号均成立，从而

$tr(A_1A_2\cdots A_{m-1})'(A_1A_2\cdots A_{m-1})=trA_1A_1'\cdots\cdots trA_{m-1}A'_{m-1}$ 。

同前面的推导一样得

$A_{m-2}A'_{m-2}=l_{m-2}A_{m-1}A'_{m-1}=l_{m-2}k_{m-1}A_m'A_m\triangleq k_{m-2}A_mA'_m$，其中$l_{m-2}$，$k_{m-1}>0$，从而$k_{m-2}\triangleq l_{m-2}k_{m-1}>0$，类似地

$A_iA'_i=k_iA_mA'_m$（$k_i>0, i=1, 2, \cdots, m-1$）。

于是引理7得证。

引理8 设A非负定，可以表$A=B^s$（$s\in N$），其中B非负定，且对每一个固定s，B是唯一的。

此结论是熟知的。

以下证明定理11 。

必要性 如果定理10中等号成立，则

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} trA_i=\left(\prod_{i=1}^{m} trA_i\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{12}$$

$$trA_1A_2\cdots A_m=trA_1trA_2\cdots trA_m . \tag{13}$$

由（12）式得

$$trA_1=trA_2=\cdots=trA_m . \tag{14}$$

而

$$\begin{aligned} trA_1A_2\cdots A_m &\leq \sqrt{trA^2{}_1}\sqrt{tr(A_2\cdots A_m)(A_2\cdots A_m)'} \\ &\leq trA_1\sqrt{tr(A_2\cdots A_m)(A_2\cdots A_m)'} \\ &\leq trA_1\sqrt{trA_2{}^2trA_3{}^2\cdots trA^2{}_m} \\ &\leq trA_1trA_2\cdots trA_m, \end{aligned}$$

由(13)式知上式各等号均成立，故由引理5知$max\{rk(A_i), 1\leq i\leq m\}\leq 1$。如果存在$i_0$使得$rkA_{i_0}=0$，即$A_{i_0}=0$，则由（14）式知$trA_1=trA_2=\cdots=trA_m=0$，从而$A_1$，$A_2$，…，$A_m$的特征值均为0，所以，有$A_1=A_2=\cdots=A_m=0$，结论成立。如果$rkA_i\neq 0$，$i=1, 2, \cdots, m$，即$A_i\neq 0$，$i=1, 2, \cdots, m$，则由引理7有$A_j{}^2\doteq k_jA_m{}^2$，$k_j>0$，（$j=2, \cdots, m-1$）。又由

$trA_1\cdots A_m\leq\sqrt{tr(A_1\cdots A_{m-1})(A_1\cdots A_{m-1})'}trA_m\leq trA_1trA_2\cdots trA_m$，同样可得 $A_1{}^2=lA^2{}_{m-1}=lk_{m-1}A^2{}_m \triangleq k_1A^2{}_m(k_1\triangleq lk_{m-1}>0)$。于是，综合上述得$A_j{}^2=k_jA^2{}_m$（$j=1, 2, \cdots, m-1$）。由引理8有$A_j=\sqrt{k_j}A_m$。又由

（14）式，$trA_1 = trA_2 = \cdots = trA_i$。故必有$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 1$，从而$A_1 = A_2 = \cdots = A_m$。必要性证得。

充分性 由于$rkA_i \leq 1$（$i = 1, 2, \cdots, m$），且$A_1 = A_2 = \cdots = A_m$，因此

$$\frac{1}{m}tr(A_1 + A_2 + \cdots + A_m) = trA_1,$$

$$\sqrt[m]{tr(A_1A_2\cdots A_m)} = \sqrt[m]{trA_1^m} = trA_1 \quad \text{（引理5）。}$$

从而$tr\frac{A_1 + \cdots + A_m}{m} = \sqrt[m]{trA_1\cdots A_m}$。即证得充分性。

十、行初等变换定理及其应用

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

是数域F上的矩阵。如果把A的每一列看作一个向量，叫做A的列向量，那么这n个列向量属于向量空间F^m。

设A经过一次行的初等变换后得到A_1，A和A_1的列向量分别记为α_1，α_2，…，α_n和α_1'，α_2'，…，α_n'。

如果A_1的任何一部分列向量（为叙述方便，假设前t个向量，$t\leq n$）满足线性关系式

$$x_1\alpha_1'+x_2\alpha_2'+\cdots+x_t\alpha_t'=0,\ x_i\in F,\ i=1,2,\cdots,t.$$

即

$$x_1\alpha_1'+\cdots+x_t\alpha_t'+0\cdot\alpha'_{t+1}+\cdots+0\cdot\alpha'_n=0$$

亦即

$$(1)\qquad A_1\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=0.$$

如果E是与初等变换对应的初等矩阵，那么E可逆且$EA=A_1$。将（1）式两边左乘以E^{-1}得

$$(2)\qquad A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=0$$

即$x_1\alpha_1+\cdots+x_t\alpha_t+0\cdot\alpha_{t+1}+\cdots+0\cdot\alpha_n=0$。亦即

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_t\alpha_t=0.$$

这说明A_1的部分列向量之间的线性关系，即为A的对应列向量之间存在的线性关系。

一次行的初等变换如此，若干次也一样。于是得到

定理 对矩阵作行的初等变换，不改变列向量之间的线性关系。

下面列举定理的一些应用。

1）可以求向量组的一个极大线性无关组，并求出该组中其它向量同这个极大无关组的线性关系。

例1 向量组$\alpha_1=(1,\ -2,\ 3)$，$\alpha_2=(2,\ 1,\ 0)$，$\alpha_3=(1,\ -7,\ 9)$，$\alpha_4=(8,\ -1,\ 6)$，求其极大无关组并将其余向量表成极大无关组的线性组合。

解 将α_1，α_2，α_3，α_4作为列组成矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ -2 & 1 & -7 & -1 \\ 3 & 0 & 9 & 6 \end{pmatrix},$$

对上述矩阵作行的初等变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故α_1，α_2是向量组的一个极大无关组，且$\alpha_3 = 3\alpha_1 - \alpha_2$，$\alpha_4 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$。

2）可以求F^m中的任一向量在任意一个基下的坐标。

例2 $\alpha_1 = (-2, 1, 3)$，$\alpha_2 = (-1, 0, 1)$，$\alpha_3 = (-2, -5, -1)$是F^3的一个基，求$\alpha = (4, 12, 6)$在这个基下的坐标。

解

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -5 & 12 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 12 \\ -2 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 12 \\ 0 & -1 & -12 & 28 \\ 0 & 1 & 14 & -30 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 12 \\ 0 & 1 & 12 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 12 \\ 0 & 1 & 12 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

从而α在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$下的坐标为$(7, -16, -1)$。

3） 可以求F^n中从一个基到另一个基的过渡矩阵。

例3 已知$\{\alpha_1=(-3,1,-2), \alpha_2=(1,-1,1), \alpha_3=(2, 3, -1)\}$，$\{\beta_1=(1, 1, 1), \beta_2=(1, 2, 3), \beta_3=(2, 0, 1)\}$是$F^3$的两个基，试求从前者到后者的过渡矩阵。

解

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 11 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & -2 & 11 & 4 & 7 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -19 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -42 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

故

$$\begin{pmatrix} -6 & -19 & -1 \\ -13 & -42 & -1 \\ -2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

是从前者到后者的过渡矩阵。

4）可具体判断两个向量组的等价。

例4 证明以下两个向量组等价. $\{\alpha_1=(1,2,3), \alpha_2=(1,0,2)\}$, $\{\beta_1=(3,4,8), \beta_2=(2,2,5), \beta_3=(0,2,1)\}$.

证明

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 5 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

两个下面打“~~~~”号的矩阵分别说明

$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1-\alpha_2$；

$\alpha_1=\beta_1-\beta_2$，$\alpha_2=-\beta_1+2\beta_2$，

因此它们等价。

5）可用来证明一些结论。

例5　证明两个等价的线性无关的向量组含有相同个数的向量。

这个结论一般是放在替换定理之后作为推论出现的。如果不用替换定理，用行初等变换定理也可以直接证明它。

证明　设

$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$与$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l\}$

是两个线性无关的等价向量组，且

$\alpha_i=(a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi})$，$i=1, 2, \cdots, k$

$\beta_j=(b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{mj})$，$j=1, 2, \cdots, l$

$A=(a_{ij})_{mk}$，$B=(b_{ij})_{ml}$。那么由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$线性无关知

$$(A\vdots B)\xrightarrow{\text{行变换}}\cdots\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix} I_k & B_1 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

由于两向量组等价，B的每个列向量可以由A的列向量线性表示，所以C是一个$(m-k)\times l$的零矩阵。

假设$k\neq l$，不妨设$l<k$，对矩阵$\begin{pmatrix} I_k & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$作行初等变换，使$B_1$的前$l$行变成$I_l$(因为$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l$线性无关)，变换后的$B_1$由于$l<k$，至少第$k$行的元素均为0，而这时$I_k$相应地变成了另一个$k$阶矩阵$A_1$，由于秩$A_1=k$，所以$A_1$的第$k$行至少有一个元素不为0，设第$i$个元素$a'_{ki}\neq 0$ $(1\leq i\leq k)$，这说明A的第i个列向量不能由B的列向量线性表示，这与等价矛盾。故$k=l$。

例6　证明有限维向量空间的替换定理：设向量组

（1°）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$

是向量空间F^n的一个线性无关组，并且每一α_i（$1\leq i\leq r$）都可以由F^n的向量组

（2°）$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$

线性表示，那么$r\leq s$，并且必要时可以对（2°）中向量重新编号，使得用$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$替换$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$后，所得的向量组

（3°）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_s$

与（2°）等价。

先作点说明，利用行初等变换定理，可以求出（2°）的一个极大无关组，必要时可以对（2°）中向量重新编号使得

（4°）$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l$

就是（2°）的一个极大无关组，这里$l\leq s$。无疑，如（1°）能替换（4°）中的部分向量，并且替换后所得的向量组与（4°）等价，那么定理便得证。所以不失一般性，可假设向量组（2°）是线性无关的。

证明 因为（1°）可以由（2°）线性表示，所以（3°）可以由（2°）线性表示，现在只需要证其反面就行了。

设A_1，A_2分别是由（1°），（2°）为列组成的两个矩阵，令$A=(A_1 \vdots A_2)$，对A作行初等变换，使A_2的上面一块变成一个s阶单位矩阵（因（2°）线性无关），下面一块变成一个$(m-s)\times s$零矩阵，这时A变成以下的分块矩阵

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & I_s \\ B_2 & 0 \end{pmatrix},$$

因（1°）的每一个向量都可以由（2°）线性表示，所以 B 的前 r 个列向量可以由后 s 个列向量线性表示，于是 $B_2=0$，而秩 $\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}=r$。由 B 知 $r\leq s$。

当 $r<s$ 时，对 B 作行初等变换，使 B_1 的上面一块变成一个 r 阶单位矩阵 I_r（因（1°）线性无关），下面一块变成一个 $(s-r)\times r$ 零矩阵，再作行初等变换并且适当排列变化后的 I_s，可使 B 变成以下的分块矩阵

$$C=\begin{pmatrix} I_r & C_1 & 0 \\ 0 & C_2 & I_{s-r} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C 显示的线性关系是 β_1，β_2，…，β_r 可由（3°）线性表示，而 β_{r+1}，…，β_s 显然可以由（3°）线性表示，故（3°）与（2°）等价。

当 $r=s$ 时，对 B 作行初等变换，可使 B 变成以下的分块矩阵

$$D=\begin{pmatrix} I_r & D_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然，D_1 的 r 个列向量可以由 D 的前 r 个列向量线性表示，这时 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 等价，故（3°）与（2°）等价。

上面的证明过程清晰地揭示了具体的替换过程，可用来解决把某个向量空间的一个线性无关组扩充为它的一个基的问题。

例7 给出 F^4 的一个线性无关组

$\{\alpha_1=(-1,\ 0,\ 3,\ -2),\ \alpha_2=(2,\ 1,\ -7,\ 5)\}$

试把α_1，α_2扩充为F^4的一个基。

解 作以下矩阵

$$A=\left(\begin{array}{cc|cccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

对A作行初等变换

$$A \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = C,$$

C显示出α_1，α_2可以替换出ε_1，ε_2来，因而$\{\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$是$F^4$的一个基。

利用行初等变换定理还容易证明以下事实

例 8　如果

（5°）　α_1，α_2，…，α_m

是F^m的一个基。

（6°） $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$

是F^m的一个向量组，A是F上一个$m\times k$矩阵，且

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)A,$$

那么$\dim L(\beta_1, \beta_2\cdots, \beta_k)=$秩$A$。

证明 设B与C是分别由（5°）与(6°)为列组成的矩阵，于是$C=BA$。因为(5°)是基，于是B可逆，这时C与A的列向量具有完全相同的线性关系，C与A的列空间维数相等，而A的列空间维数等于秩A，C的列空间即$L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$，故结论成立。

例9 试证明维数公式

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

证明 设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$与$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\}$是$F^n$的两个线性无关组，$W_1=L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$，$W_2=L(\beta_1, \cdots, \beta_s)$。于是$\dim W_1=r$，$\dim W_2=s$，$W_1+W_2=L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s)$。又设$r\leq s$，$\dim(W_1+W_2)=l$，则$s\leq l\leq r+s$。

当$r=l$时，便有$s=r$，说明W_1或W_2的基也是W_1+W_2的基，于是$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$与$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r\}$等价，因而$W_1=W_2$，$W_1\cap W_2=W_1$或$W_2$，显然维数公式成立。

当$r<l\leq s+r$时，不失一般性，假设

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{l-r}$$

就是W_1+W_2的一个基。再设以$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$与$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\}$为列向量的矩阵分别是$A_1$与$A_2$，令$A=(A_1\vdots A_2)$，对$A$作行初等变换，当$l=s+r$时，$A$变成

$$B=\begin{pmatrix} I_{s+r} \\ 0 \end{pmatrix},$$

当$r<l<s+r$时，A变成

$$C=\left(\begin{array}{c|cc} I_r & 0 & C_1 \\ 0 & I_{l-r} & C_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

如$\alpha\in W_1\cap W_2$，则

$$\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_s)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}.$$

即有

$$(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_r,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_s)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ -y_1 \\ \vdots \\ -y_s \end{pmatrix}=0,$$

此即

$$(7^\circ)\qquad A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ -y_1 \\ \vdots \\ -y_s \end{pmatrix}=0.$$

当A变成B时，(7°)只有零解，这时$W_1\cap W_2=\{0\}$，维数公式成立；当A变成C时，因为秩$A_2=s$，所以，秩$C_1=s+r-l$。

从(7°)可得

$$C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ -y_1 \\ \vdots \\ -y_s \end{pmatrix}=0.$$

进一步又得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} y_{l-r+1} \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}$，

其中y_{l-r+1}，…，y_s是自由未知量，于是

$$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

$$=[(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)C_1]\begin{pmatrix} y_{l-r+1} \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}.$$

设

$$(\gamma_1, \cdots, \gamma_{s+r-l})=(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)C_1,$$

因为秩$C_1=s+r-l$，所以$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_{s+r-l}\}$是$W_1\cap W_2$的一个基，即$dim W_1\cap W_2=s+r-l$，从而维数公式成立。

例10　F^m的任一向量组存在的线性关系与基的选择无关。

证明　设

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}与\{\beta_1, \beta_2\cdots, \beta_m\}$$

是F^m的两个基，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_t$是$F^m$的一个向量组，那么

$$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_t)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)A,$$

$$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_t)=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)B,$$

其中A，B都是数域F上的$m\times t$矩阵，A，B的各列元素就是$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_t$在前后两个基下的坐标。又设$T$是从前一个基到后一个基的过渡矩阵，于是$B=TA$。这说明矩阵$B$可以由矩阵$A$经行初等变换得到，因此$B$与$A$的列向量具有完全相同的线性关系。

下面利用行初等变换定理推出两个新结论。

结论 1 如数域F上的一个非零矩阵A经过行初等变换后得到

$$B=\begin{pmatrix} I_r & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix},$$

那么A的前r个列向量即是它的列向量组的一个极大无关组。

证明 设$A=(a_{ij})_{mn}$是数域F上的一个非零的$m\times n$矩阵，A的n个列向量分别记为

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$。

如果A经过行初等变换后得到

$$B=\begin{pmatrix} I_r & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (r=n的情形)$$

这里$B_1=(b_{ij})_{r\times(n-r)}$，$r+1\leq j\leq n$，$B$的$n$个列向量分别记为

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$

在B的前一种情形，向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$当且仅当一切$b_i=0$（$i=1, 2, \cdots, r$）时等式

$$\sum_{i=1}^{r} b_i\beta_i=0$$

成立，且$\beta_j=\sum_{i=1}^{r} b_i\beta_i$，$j=r+1, \cdots, n$，于是$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$是$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$的一个极大无关组，由行初等变换定理知$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的一个极大无关组。

在B的后一种情形，列向量组本身便是它的唯一极大无关组。证毕！

结论 2 如$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$与$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\}$是向量空间$F^m$的两个向量组，设以它们为列作成的矩阵分别是$A$，$B$，令$C=(A \vdots B)$。那么这两个向量组等价的充要条件是

秩A=秩B=秩C。

证明 设秩$A=k$，秩$B=l$，对C作行初等变换，必要时交换列，可使A变成

$$\begin{pmatrix} I_k & A_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix},$$

这里$k \le r$，这时C变成

$$\begin{pmatrix} I_k & A_1 & \vdots & B_1 \\ 0 & 0 & \vdots & B_2 \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} I_k & \vdots & B_1 \\ 0 & \vdots & B_2 \end{pmatrix},$$

因为$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示，所以$B_2=0$，又秩$B_1$=秩$B=l$，所以$l \le k$=秩$C$。同理可证$k \le l$=秩$C$。 故$k=l$=秩$C$

反之，如秩A=秩B=秩$C=k$，对C作行初等变换，必要时交换列，可把C变成

$$\begin{pmatrix} I_k & A_1 & \vdots & B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} I_k & \vdots & B_1 \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

无论哪一种情形都可表明β_1，β_2，…，β_s可以由α_1，α_2，…，α_r线性表示。同理可证，α_1，α_2，…，α_r可以由β_1，β_2，…，β_s线性表示，故这两个向量组等价。证毕！

十一、关于n维线性空间的子空间

本节对n维线性空间的子空间做些讨论，首先给出子空间交的基与维数的一种确定方法，其次给出余子空间的一些性质。

1．子空间交的基与维数的确定方法

设V是数域F上n维线性空间，V_1与V_2是它的两个子空间，且

$V_1=L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$，$V_2=L(\beta_1, \beta_2\cdots, \beta_s)$。于是$V_1+V_2=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s)$。故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$的一个极大线性无关组就是子空间$V_1+V_2$的一个基，且

$dim(V_1+V_2)=$秩$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1,\beta_2, \cdots, \beta_s)$。

这些都 是容易确定的。现在的问题是如何由V_1，V_2的生成元$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$和$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$求出$V_1\cap V_2$的一个基，并由此得到$V_1\cap V_2$的维数。一种方法是利用以下两个结论来确定。

命题 1　数域F上n维线性空间V的任一子空间都是F上某一n元齐次线性方程组的解空间。

命题 2　两个n元齐次线性方程组的解空间的交，是以这两个方程组的全体方程所构成的齐次线性方程组的解空

间。

下面介绍的方法，只需解一个n元线性方程组，计算量较小，也比较自然。比上述方法优越。先从实例入手，通过分析导出解法。

例1 设$V_1=L(\alpha_1,\ \alpha_2)$，$V_2=(\beta_1,\ \beta_2)$是数域$F$上四维线性空间的子空间，且

$$\alpha_1=(1,\ 2,\ 1,\ 0),\ \alpha_2=(-1,\ 1,\ 1,\ 1),$$
$$\beta_1=(2,\ -1,\ 0,\ 1),\ \beta_2=(1,\ -1,\ 3,\ 7).$$

求$V_1\cap V_2$的一个基与维数。

解 若$\gamma\in V_1\cap V_2$，则存在$x_1',\ x_2',\ y_1',\ y_2'\in F$使

$$\gamma=x_1'\alpha_1+x_2'\alpha_2=y_1'\beta_1+y_2'\beta_2 \tag{1}$$

即有 $$x_1'\alpha_1+x_2'\alpha_2-y_1'\beta_1-y_2'\beta_2=0 \tag{2}$$

故$x_1',\ x_2',\ y_1',\ y_2'$是向量方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2-y_1\beta_1-y_2\beta_2=0 \tag{3}$$

的解，也就是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2-2y_1-y_2=0 \\ 2x_1+x_2+y_1+y_2=0 \\ x_1+x_2-3y_2=0 \\ x_2-y_1-7y_2=0 \end{cases} \tag{4}$$

的解。反之，由齐次线性方程组(4)在F中的任一解$(k_1,\ k_2,\ l_1,\ l_2)$所确定的向量

$$\gamma'=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=l_1\beta_1+l_2\beta_2$$

必属于交空间$V_1\cap V_2$.

齐次线性方程组(4)有解是肯定的。若(4)只有零解，则$V_1\cap V_2$是零子空间，因而没有基，此时的维数是0，V_1+V_2就是直和。若(4)有非零解，则$V_1\cap V_2$就有可能是非零子空间，因而有基。

考察(4)的系数矩阵A经行初等变换化为标准阶梯形

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -1 & -7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

故秩$(A)=3$，$(-1, 4, -3, 1)$是齐次线性方程组(4)的一个基础解系。(4)的解空间的维数等于1。又

$$dimV_1=2,\ dimV_2=2.$$

而$dim(V_1+V_2)=$秩$(A)=3$。所以

$$dim(V_1\cap V_2)=(2+2)-3=1.$$

因此$\gamma=-\alpha_1+4\alpha_2=-3\beta_1+\beta_2=(-5, 2, 3, 4)$是$V_1\cap V_2$的一个基。

由此例可以看出，我们是通过解齐次线性方程组(4)，求出x_1，x_2，y_1，y_2以x_1，x_2作为α_1，α_2的组合系数，或者以y_1，y_2作为β_1，β_2的组合系数来求交$V_1\cap V_1$中的向量，进而确定$V_1\cap V_2$的基与维数。在例1中，(4)的解空间的维数是1，$V_1\cap V_2$的维数也是1，这是否为必然呢？答案是否定的。

进一步分析如下，设

$$V_1=L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r),\ V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s).$$

中$\alpha_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$，$i=1, 2, \cdots, r$；
$\beta_j=(b_{j1}, b_{j2}, \cdots b_{jn})$，$j=1, 2, \cdots, s$。显然，$\gamma\in V_1\cap V_2$的充要条件是存在$x_1', x_2', \cdots, x_r', y_1', y_2', \cdots, y_s'\in F$，使

$$(\text{I}) \qquad \gamma=\sum_{i=1}^{r}x_i'\alpha_i, \qquad \gamma=\sum_{j=1}^{s}y_j'\beta_j$$

即$x_1', x_2', \cdots, x_r', y_1', y_2', \cdots y_s'$是向量方程

$$(\text{II}) \qquad x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r-y_1\beta_1-\cdots-y_s\beta_s=0$$

的解，也就是与之等价的含$r+s$个未知数，n个方程的齐次线性方程组

$$(\text{III})\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{r1}x_r-b_{11}y_1-\cdots-b_{s1}y_s=0\\ a_{12}x_1+\cdots+a_{r2}x_r-b_{12}y_1-\cdots-b_{s2}y_s=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}x_1+\cdots+a_{rn}x_r-b_{1n}y_1-\cdots-b_{sn}y_s=0\end{cases}$$

的解。反之，齐次线性方程组(III)的任一解$(k_1, k_2, \cdots, k_r, l_1, l_2, \cdots l_s)$所确定的向量

$$\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_s\beta_s$$

必属于$V_1\cap V_2$。因此只要求得(III)的一个基础解系

$$\xi_i=(k_{i1}, k_{i2}, \cdots, k_{ir}, l_{i1}, l_{i2}, \cdots, l_{is})$$

$i=1, 2, \cdots, t$。t是(III)的解空间的维数。就得到了$V_1\cap V_2$的一组生成元

$$\gamma_i=\sum_{j=1}^{r}k_{ij}\alpha_j\text{或}\quad \gamma_i=\sum_{j=1}^{s}l_{ij}\beta_j$$

$i=1, 2, \cdots, t$。显然

(Ⅰ)的未知数的个数 = V_1的生成元的个数 + V_2的生成元的个数 = $r+s$

(Ⅰ)的系数矩阵的秩 = 秩(α_1, α_2, …, α_r, β_1, β_2, …, β_s) = $dim(V_1+V_2)$。

(Ⅰ)的解空间的维数 = (Ⅰ)的未知数的个数 − 系数矩阵的秩 = $r+s-dim(V_1+V_2)$

所以，当$dimV_1$ = V_1生成元的个数 = 秩(α_1, α_2, …, α_r)；$dimV_2$ = V_2生成元的个数 = 秩(β_1, β_2, …, β_s)时，即α_1, α_2, …, α_r与β_1, β_2, …, β_s都与性无关，正好分别是V_1与V_2的基时，(Ⅰ)的解空间的维数正好等于$V_1\cap V_2$的维数。这样只要求出了(Ⅰ)的一个基础解系，就可以立即写出$V_1\cap V_2$的一个基。

在例1中，由于$dimV_1$ = V_1的生成元的个数，$dimV_2$ = V_2的生成元的个数，即α_1, α_2和β_1, β_2正好是V_1与V_2的基。这个条件决定了(4)的解空间维数与交空间的维数相等。如果没有这个条件，则(Ⅰ)的解空间的维数，就不等于交空间的维数。为说明这一点，再看一例。

例2 设

$\alpha_1=(2, -1, 0, 1)$, $\beta_1=(1, 0, 1, 2)$

$\alpha_2=(-1, 1, 1, 1)$, $\beta_2=(-1, 2, 3, 4)$

$\alpha_3=(0, 1, 2, 3)$

$V_1=L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $V_2=L(\beta_1, \beta_2,)$,求$V_1\cap V_2$的基与维数。

解 令$\gamma\in V_1\cap V_2$，则存在x_1, x_2, x_3, y_1, $y_2\in F$

使

$$(\text{Ⅰ}') \qquad x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 - y_1\beta_1 - y_2\beta_2 = 0$$

即有

$$(\text{Ⅱ}') \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - y_1 + y_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2y_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - y_1 - 3y_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2y_1 - 4y_2 = 0 \end{cases}$$

(Ⅱ')的系数矩阵

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix},$$

经行的初等变换可化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因为秩$(A_1) = 2$。所以(Ⅱ')的解空间维数是3。易知

$\xi_1 = (-1, -2, 1, 0, 0)$

$\xi_2 = (1, 1, 0, 1, 0)$

$\xi_3 = (1, 3, 0, 0, 1)$

是(Ⅱ′)的一个基础解系。故

$$\gamma_1=-\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0,$$

$$\gamma_2=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1,\qquad \gamma_3=\alpha_1+3\alpha_2=\beta_2.$$

是$V_1\cap V_2$的一组生成元。但是

$$dimV_1=2,\ dimV_2=2,$$

$$dim(V_1+V_2)=\text{秩}(A_1)=2.$$

所以$dim(V_1\cap V_2)=(2+2)-2\neq 3$。显然$\gamma_1$，$\gamma_2$，$\gamma_3$的一个极大线性无关组$\{\gamma_2.\ \gamma_3\}$就是$V_1\cap V_2$的一个基。由前面的分析可以知道，造成这种情形的原因是由于$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$并不是$V_1$的基。

综上所述，一般情形下的解空间的维数不一定就等于空间$V_1\cap V_2$的维数，但由(Ⅱ)的一个基础解系

$$\xi_1=(k_{11},\ k_{12},\ \cdots,\ k_{1r},\ l_{11},\ l_{12},\ \cdots,\ l_{1s})$$

$$\xi_2=(k_{21},\ k_{22},\ \cdots,\ k_{2r},\ l_{21},\ l_{22},\ \cdots,\ l_{2s})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_t=(k_{t1},\ k_{t2},\ \cdots,\ k_{tr},\ l_{t1},\ l_{t2},\ \cdots,\ l_{ts})$$

可以求得$V_1\cap V_2$中的一组向量

$$\gamma_1=k_{11}\alpha_1+k_{12}\alpha_2+\cdots+k_{1r}\alpha_r$$

$$\gamma_2=k_{21}\alpha_1+k_{22}\alpha_2+\cdots+k_{2r}\alpha_r$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_t=k_{t1}\alpha_1+k_{t2}\alpha_2+\cdots+k_{tr}\alpha_r$$

(或$\gamma_i=\sum_{j=1}^{s}l_{ij}\beta_j$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ t$)。而交空间$V_1\cap V_2$中任一向量都是它们的线性组合。故只要求出$\gamma_1$，$\gamma_2$，$\cdots$，$\gamma_t$的一个极大线性无关组，就可得到$V_1\cap V_2$的一个基，自

然也就知道$V_1\cap V_2$的维数。

一个普通的方法是，首先求出向量组α_1，α_2，…，α_r与β_1，β_2，…，β_s的极大线性无关组，即V_1与V_2的基；再利用交空间$V_1\cap V_2$中的元素的表示法导出齐次线性方程组。此时情况就和例1中所述的一致，只要求出齐次线性方程组的一个基础解系，就立即可以得出$V_1\cap V_2$的一个基。有兴趣的读者对例2用此法做一次。

2．余子空间的性质

在n维线性空间V中，任一非平凡子空间的余子空间是不唯一的。下面将给出W的余子空间的一般表示法，并讨论W的任意两个余子空间的和与交的维数取值范围。

设F是一数域，V是F上n维线性空间。令$L(V)=\{W\mid W$是V的子空间$\}$，则$L(V)$对"$\subseteq$"作成一个完全的有补模格。但是，当W是V的非平凡子空间时，W的补元，即W的余子空间是不唯一的。尽管如此，我们可以给出W的余子空间的一般表示法。

定理1　若W是数域F上n维线性空间V的非平凡子空间，α_1，α_2，…，α_r是W的基底，α_1，α_2，…，α_r，α_{r+1}，…，α_n是V的基底。那么，$L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r})$是$W$的一个余子空间的充要条件是

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r})=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$$

其中，$A_1=(a_{ij})_{r\times(n-r)}$，$1\leq i\leq r$；$A_2=(a_{ij})_{(n-r)\times(n-r)}$，$r+1\leq i\leq n$，$1\leq j\leq n-r$。$a_{ij}\in F$，$|A_2|\neq 0$。

证明　"$\Longleftarrow$"因为$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})$

$= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} I_r & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. 而 $\begin{vmatrix} I_r & A_1 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} =$

$|I_r| \cdot |A_2| = |A_2| \neq 0$。

所以，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r}$是$V$的基。因此，$L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r})$是$W$的一个余子空间。

"$\Longrightarrow$" 任取W的一个余子空间$L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r})$，

设$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r}) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$，

其中B_2是$n-r$阶方阵，由此可得

$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r}) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

$\begin{pmatrix} I_r & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$. 由可逆性知 $\begin{vmatrix} I_r & B_1 \\ 0 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$，

$|I_r|\ |B_2| = |B_2| \neq 0$。

推论 1 若$W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$是$n$维线性空间$V$的一个子空间，$W' = L(\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n)$是$W$的一个余子空间。那么$W$的余子空间$L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r})$与$W'$相等的充要条件是

若$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r}) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$，

$|B_2| \neq 0$必有$B_1 = 0_{r\times(n-r)}$。

证明 若$B_1 = 0$，则$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r}) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

$\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix} = (\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n) B_2$，而$|B_2| \neq 0$，

所以β_1，β_2，…，β_{n-r}与α_{r+1}，α_{r+2}，…，α_n等价，故$L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r})=W'$。

若$L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r})=W'$，可得$\alpha_{r+1}$，$\alpha_{r+2}$，…，$\alpha_n$与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r}$等价。设$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r})=(\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n)T$，$T$是$n-r$阶可逆矩阵，所以

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r})=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix}0\\T\end{pmatrix}.$$

又因为

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r})=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix},$$

故有 $\begin{pmatrix}0\\T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$，

所以$B_1=0_{r\times(n-r)}$。

定理2 设W是数域F上n维线性空间V的子空间（$0<dimW<n$），W_1'，W_2'是W的任意两个余子空间，那么

(a) $n-dimW\le dim(W_1'+W_2')\le min[dimV, 2(n-dimW)]$，

(b) $max[0, n-2dimW]\le dim(W_1'\cap W_2')\le n-dimW$，

(c) $\forall s\in N$，$n-dimW\le s\le min[dimV, 2(n-dimW)]$，一定存在$W$的余子空间$W_1'$，$W_2'$，使$dim(W_1'+W_2')=s$，且$dim(W_1'\cap W_2')=2(n-dimW)-s$。

证明 (a) 设$dimW=r$，$(0<r<n)$，则$dimW_1'=dimW_2'=n-r$。因为$W_1'\subseteq W_1'+W_2'\subseteq V$，故$n-r\le dim$

$(W_1'+W_2')\leq n$，又$dim(W_1'+W_2')\leq dimW_1'+dimW_2'=2(n-r)$，所以$n-r\leq dim(W_1'+W_2')\leq min[n,2(n-r)]$

(b) 因为$dim(W_1'\cap W_2')=dimW_1'+dimW_2'-dim(W_1'+W_2')$，所以$2(n-r)-min〔n, 2(n-r)〕\leq dim(W_1'\cap W_2')\leq 2(n-r)-(n-r)$。即$max〔0,n-2r〕\leq dim(W_1'\cap W_2')\leq n-r$.

(c)设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$W$的基底，任取$W$的一个余子空间$W'=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r})$，显然$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$是$V$的基底。

令$W_t'=L(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_t+\beta_t,\beta_{t+1},\cdots,\beta_{n-r})$，其中$0\leq t\leq min(r,n-r)$。因为

$$(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_t+\beta_t,\beta_{t+1},\cdots,\beta_{n-r})=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})\begin{pmatrix}A_1\\I_{n-r}\end{pmatrix}，其中A_1=\begin{pmatrix}I_t&0\\0&0\end{pmatrix}_{r\times(n-r)}.$$

由定理1知，W_t'是W的余子空间，$W'+W_t'=L(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_t+\beta_t,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r})$且易证$\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_t+\beta_t,\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$线性无关，所以$dim(W'+W_t')=n-r+t$，而$dim(W'\cap W_t')=dimW'+dimW_t'-dim(W'+W_t')=2(n-r)-(n-r+t)=(n-r)-t$.

任取s，s是正整数，$n-r\leq s\leq min〔n, 2(n-r)〕$，取$t_1=s-(n-r)$，有$0\leq t_1\leq min〔r, n-r〕$，那么$dim(W'+W_t')=s$，且$dim(W'\cap W_t')=2(n-r)-s$。

由定理2的证明发现，当且仅当$dimW=\frac{1}{2}dimV$时，存在W的两个余子空间W'与W_r'，使$V=W'\oplus W_r'$。对此，可

以证明更一般的结论

定理3 设W是数域F上n维向量空间V的非平凡子空间。那么，当且仅当$dimW=\frac{s}{s+1}dimV$时，V可以表示为W的$s+1$个余子空间的直和（s为正整数）。

证明 若$V=W_1'\oplus W_2'\oplus\cdots\oplus W'_{s+1}$，其中$W_i'(i=1,2,\cdots,s+1)$是$W$的余子空间，显然$dimV=(s+1)dim W_1'=(s+1)(n-dimW)$，所以$(s+1)dimW=s\cdot dimV$。即

$$dimW=\frac{s}{s+1}dimV.$$

若$dimW=\frac{s}{s+1}dimV$，易得$dimW=s(n-dimW)$。

设$dimW=r, W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$，有$r=s(n-r),(n-r)|r$ 取W的一个余子空间$W_0'=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r})$。令

$$W_k'=L(\gamma_{k1},\gamma_{k2},\cdots,\gamma_{k,n-r})$$

其中，$(\gamma_{k1},\gamma_{k2},\cdots,\gamma_{k,n-r})=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})\begin{pmatrix}0_1\\I_{n-r}\\0_2\\I_{n-r}\end{pmatrix}$，$1\leq k\leq s$。$0_1$是$(n-r)(k-1)$行$(n-r)$列零矩阵。因为

$$|I_{n-r}|\neq 0,$$

由定理1知W_k'是W的一个余子空间.

$$(\beta_1, \cdots, \beta_{n-r}, \gamma_{11}, \cdots, \gamma_{1,n-r}, \cdots, \gamma_{s1}, \gamma_{s2}, \cdots, \gamma_{s,n-r}) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r}) \begin{pmatrix} 0_{r\times(n-r)} & I_r \\ I_{n-r} & A \end{pmatrix}.$$

其中$A = (\underbrace{I_{n-r}, I_{n-r}, \cdots, I_{n-r}}_{s个})$.所以

$\beta_1, \cdots, \beta_{n-r}, \gamma_{11}, \cdots, \gamma_{1,n-r}, \cdots, \gamma_{s1}, \cdots, \gamma_{s,n-r}$
是V的一个基，故有$V = W_0' \oplus W_1' \oplus \cdots \oplus W_s'$.

推论2 设W是数域F上n维线性空间V的非平凡子空间，W'是W的余子空间，V可表示成W的$(s+1)$个余子空间的直和的充要条件是

$$dimW = s \cdot dimW',$$

这里s是正整数。

十二、有关线性变换的两个问题

1. 已知核求相应的线性变换

关于求线性变换的核，教科书中都有所涉及。这里考虑其反问题，即由核求相应的线性变换问题。

命题1 设α_1，α_2，…，α_n是线性空间V的一基，β_1，β_1，…，β_n是V中任意n个向量，α为V的任一向量且$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$。则

$$T: \alpha \to x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n$$

是V上的线性变换且$T(\alpha_i) = \beta_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$。

命题2 若n个未知量的齐次线性方程组的系数矩阵的秩是r，则该方程组的任意$n-r$个线性无关的解向量都构成该方程组的一个基础解系。

以上命题及其证明均可在高代教材中找到。

设V是数域F上的n维线性空间，α_1,α_2,…，α_n为V的一基，β_1，β_2，…β_s是V的s个线性无关的向量，则V上的以$L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$为核的线性变换，$T$可通过以下步骤求得

（i）由$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)B$求出$B$；

（ii）求出齐次线性方程组$B'X = 0$的一个基础解系ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-s}；

(iii) 作n级方阵$A'=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-s}, 0, 0, \cdots, 0)$。于是$B'A'=0_{s\times n}$即$AB=0_{n\times s}$;

(iv) 令$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$,作$V$上的线性变换$T$, $T(\alpha)=x_1\gamma_1+x_2\gamma_2+\cdots+x_n\gamma_n$, 这里$\alpha$为$V$的任一向量且$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$、$T$就是$V$上的以$L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$为核的线性变换。

证明 由命题1知$T(\alpha_i)=\gamma_i$, $i=1, 2, \cdots, n$,先证$L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)\subseteq kerT$。

$\forall\gamma\in L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$, 则$\gamma=k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s=(\beta_1, \cdots, \beta_s)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_s\end{pmatrix}$。

$$T\gamma=T(\beta_1, \beta_2, \cdots,\beta_s)\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_s\end{pmatrix}$$

$$=T(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)B\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_s\end{pmatrix}$$

$$=(T\alpha_1, T\alpha_2,\cdots, T\alpha_n)B\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_s\end{pmatrix}$$

$$=(\gamma_1, \gamma_2, \cdots,\gamma_n)B\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_s\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)AB\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)0_{n\times s}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix}=0.$$

此即说明$\gamma\in kerT$。所以$L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)\subseteq kerT$。再证$kerT\subseteq L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$。

因秩$A=n-s$，所以齐次线性方程组$AX=0$的解 空 间的 维 数 为s，令$B=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s)$，则 由（i）知$\eta_1$ η_2，…，η 是s个线性无关的n维列向量。

因$AB=0_{n\times}$，故η_1，η_2，…，η 为齐次线性方程组$AX=0$的s个线性 无 关的解向量。由 命 题2 知η_1，η_2，…，η_s为$AX=0$的一个基础解系。

$\forall\alpha\in kerT$，则$T\alpha=0$.

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$$

$$=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$T\alpha=T(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0,$$

于是$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0$。所以，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$为$AX=0$的一个解向量，它可由$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$线性表示，不妨设

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=l_1\eta_1+l_2\eta_2+\cdots+l_s\eta_s$$

$$=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s)\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_s \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_s \end{pmatrix}.$$

则$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)B\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_s \end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_s \end{pmatrix}=l_1\beta_1+l_2\beta_2+$$

$\cdots+l_s\beta_s$.

即说明$\alpha\in L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$.从而$kerT\subseteq L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$.

综上有$kerT=L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$.

需说明的是，(iii)中n级方阵A'的作法只需要满足A的前$n-s$列是$B'X=0$的基础解系，后s列是$B'X=0$的解向量即可。因此A'不唯一，从而T也不唯一。

例　在R^4中，$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，

$$\alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

求以$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$为核的$R^4$上的线性变换$T$.

解　易知α_1, α_2是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$的一个极大线性无关组，故$L(\alpha_1, \alpha_2)=L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

设

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

为R^4的基底.

因$\alpha_1=\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_4$， $\alpha_2=-\varepsilon_1+\varepsilon_2$. 故$(\alpha_1, \alpha_2)$

$$=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\\2&0\\1&0\end{pmatrix},$$

可求得齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

的一个基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$， $\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$.

令 $$A'=\begin{pmatrix}-1&-2&0&0\\-1&-2&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

设$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)A$. 作线性变换$T$，

$$T\alpha=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},$$

$$\forall\alpha\in V\text{且}\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},$$

$$\text{于是}T\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=I_4A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-1&0&1\\-2&-2&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},$$

则T即为所求。

2．公式$dimIm(\sigma)+dimker(\sigma)=dimV$的应用

定理1 设V和W都是数域F上的向量空间，$dimV=n$，σ是V到W的一个线性映射，则有

$$dimker(\sigma)+dimIm(\sigma)=n \tag{1}$$

证明 如此选取V的一个基

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$$

使得α_1，α_2，…，α_s是$ker(\sigma)$的一个基。

$\forall \xi \in V$，有

$$\xi = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s + k_{s+1}\alpha_{s+1} + \cdots + k_n\alpha_n$$

易得$\sigma(\xi) = k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \cdots + k_s\sigma(\alpha_s) + k_{s+1}\sigma(\alpha_{s+1}) + \cdots + k_n\sigma(\alpha_n)$.因$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_s$是$ker(\sigma)$的基，所以$\sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_2) = \cdots = \sigma(\alpha_s) = 0$。故得

$$\sigma(\xi) = k_{s+1}\sigma(\alpha_{s+1}) + \cdots + k_n\sigma(\alpha_n).$$

因此，$\sigma(\alpha_{s+1})$，…，$\sigma(\alpha_n)$是$Im(\sigma)$的生成元。

又由$k_{s+1}\sigma(\alpha_{s+1}) + \cdots + k_n\sigma(\alpha_n) = 0$可得

$$\sigma(k_{s+1}\alpha_{s+1} + \cdots + k_n\alpha_n) = 0$$

$$k_{s+1}\alpha_{s+1} + \cdots + k_n\alpha_n \in ker(\sigma).$$

从而有

$$k_{s+1}\alpha_{s+1} + \cdots + k_n\alpha_n = k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s$$

即

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s - k_{s+1}\alpha_{s+1} - \cdots - k_n\alpha_n = 0.$$

所以有$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = k_{s+1} = \cdots = k_n = 0$。这说明，$\sigma(\alpha_{s+1})$，…，$\sigma(\alpha_n)$线性无关.故$\sigma(\alpha_{s+1})$，…，$\sigma(\alpha_n)$是$I_m(\sigma)$的基。

由此，$dimker(\sigma) = s$，$dimIm(\sigma) = n - s$.因而有

$$dimker(\sigma) + dimIm(\sigma) = n.$$

推论 1 设V是数域F上n维向量空间，σ，τ是V的线性变换，则

$$dimIm(\sigma\tau) = dimIm(\tau) - dim(Im(\tau) \cap ker(\sigma))$$

证明 将σ限制在子空间$\tau(V)$上，得$\sigma|_{\tau(V)}$是$\tau(V)$到V的一个线性映射，由定理1得

$$dim\,(\,ker(\sigma)\cap Im(\tau)\,)+dimIm(\sigma\tau)=dimIm(\tau)$$

即

$$dimIm\,(\sigma\tau)=dimIm\,(\tau)-dim\,(\,Im(\tau)\cap ker(\sigma)\,)\,.$$

推论2 设A、B是数域F上的$m\times n$、$n\times s$矩阵，则

$$r(AB)=r(B)-dim\,(\,R(B)\cap N(A)\,)$$
$$=r(A)-dim\,(\,R(A')\cap N(B')\,)\,.$$

其中$R(B)=\{\,X\mid BY=X, Y\in F^s\,\}$，$N(A)=\{\,X\mid AX=0, X\in F^n\,\}$ 为F 的子空间，$r(A)=A$的秩．

证明 将A限制于子空间$R(B)$，则A可看成$R(B)$到$R(A)$的一个线性映射$A|_{R(B)}$，其象为$R(AB)$，核为$R(B)\cap N(A)$．于是由定理1得

$$dim\,(\,R(B)\cap N(A)\,)+dimR(AB)=dimR(B)\,.$$

又 ∵ $dimR(AB)=r(AB)$，$dimR(B)=r(B)$．故有

$$r(AB)=r(B)-dim\,(\,R(B)\cap N(A)\,)\,.$$

由于$r(AB)=r(\,(AB)'\,)=r(B'A')$，$r(A)=r(A')$，对$B'A'$用公式$r(AB)=r(B)-dim\,(\,R(B)\cap N(A)\,)$即得

$$r(AB)=r(A)-dim\,(\,R(A')\cap N(B')\,)\,.$$

下面举例说明上述公式的应用。

例1 证明Sylvester不等式

$$r(A)+r(B)-n\leq r(AB)\leq min\,(\,r(A),\ r(B)\,)\,.$$

其中A为n列，B为n行。

证明 由推论2可得

$$r(AB)=r(B)-dim\,(\,R(B)\cap N(A)\,),$$

而$n-r(A)=dimN(A)\geq dim\,(\,R(B)\cap N(A)\,)\geq 0$．所以

$$r(AB)=r(B)-dim\,(\,R(B)\cap N(A)\,)$$

$\geq (B)-(n-r(A))=r(A)+r(B)-n$.

又由推论2显然得$r(AB)\leq r(B)$, $r(A)$. 故有

$r(A)+r(B)-n\leq r(AB)\leq \min(r(A), r(B))$.

例2　证明Frobenius不等式

$r(ABC)\geq r(AB)+r(BC)-r(B)$.

其中A、B、C分别是$m\times n$, $n\times l$, $l\times s$矩阵.

证明　由推论2

$r(ABC)=r(BC)-\dim(R(BC)\cap N(A))$,

$r(AB)=r(B)-\dim(R(B)\cap N(A))$,

上两式相减得

$r(ABC)=r(AB)+r(BC)-r(B)+\dim(R(B)\cap N(A))-\dim(R(BC)\cap N(A))$.

因$R(BC)\subseteq R(B)\Longrightarrow R(BC)\cap N(A)\subseteq R(B)\cap N(A)$
$\Longrightarrow \dim(R(B)\cap N(A))-\dim(R(BC)\cap N(A))\geq 0$.

所以$r(ABC)\geq r(AB)+r(BC)-r(B)$.

例3　设σ,τ都是n维向量空间V的线性变换, 证明

$\dim\ker(\sigma\tau)\leq \dim\ker(\sigma)+\dim\ker(\tau)$.

证明　由定理1、推论1得

$\dim Im(\sigma\tau)=\dim Im(\tau)-\dim(Im(\tau)\cap\ker(\sigma))$

$\dim Im(\sigma\tau)+\dim\ker(\sigma\tau)=n$,

$\dim Im(\tau)+\dim\ker(\tau)=n$.

于是得

$\dim\ker(\sigma\tau)=\dim\ker(\tau)+\dim(Im(\tau)\cap\ker(\sigma))$.

因$Im(\tau)\cap\ker(\sigma)\subseteq\ker(\sigma)$, 故$\dim\ker(\sigma)\geq\dim(Im(\tau)\cap\ker(\sigma))$. 所以

$\dim\ker(\sigma\tau)\leq\dim\ker(\tau)+\dim\ker(\sigma)$.

例4　试证

(a)　$r(AA')=r(A)$；

(b)　$r(AB)=r(A)$，当B为可逆矩阵；

(c)　若A为$m\times n$矩阵，秩为m，C为$r\times m$矩阵，秩为r，则$r(CA)=r$。

证明　(a)　由推论2得

$$r(AA')=r(A)-dim\,(R(A')\cap N(A))\ .$$

只须证明$R(A')\cap N(A)=\{0\}$。事实上，在标准内积下，$\forall X\in N(A)\Longleftrightarrow X\bar{\in}N(A')\Longleftrightarrow X\bar{\in}R(A')\Longleftrightarrow X\in R^{\perp}(A')\Longleftrightarrow N(A)=R^{\perp}(A')$。故$R(A')\cap N(A)=\{0\}$。

(b) 由推论2得

$$r(AB)=r(A)-dim\,(R(A')\cap N(A'))\ .$$

由于B可逆，故B'也可逆。因此$N(B')=\{0\}$。故

$$dim\,(R(A')\cap N(B'))=0$$

从而$r(BA)=r(A)$。

(c)　由推论2得

$$r(CA)=r(C)-dim\,(R(C')\cap N(A'))\ .$$

由于A的秩为m，故A'为$n\times m$矩阵且秩为m。易知$A'X=0$只有零解。即$N(A')=\{0\}$。所以

$$dim\,(R(C')\cap N(A'))=0,$$

从而$r(CA)=r(C)=r$。证毕！

例5　若$r(A^m)=r(A^{m+1})$，则$r(A^n)=r(A^{n+1})$，当$n\geq m$。

证明　由推论2得

$$r(A^{m+1})=r(A^m)-dim\,(R(A^m)\cap N(A))\ .$$

由题设知$N(A)\cap R(A^m)=\{0\}$. 又因$R(A^n)\subseteq R(A^m)$，当$n\geq m$，知$N(A)\cap R(A^n)=\{0\}$，当$n\geq m$. 于是再利用推论2得

$$r(A^{n+1})=r(A^n)-dim(N(A)\cap R(A^n))=r(A^n).$$

例6　设A、B都是$m\times n$矩阵，则有

$$r(A+B)=r(A)+r(B)-dim\left(R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\cap N(I_m : I_m)\right)-dim(R(A')\cap R(B'))\leq r(A)+r(B).$$

且等号成立的充要条件是$R(A')\cap R(B')=\{0\}$，$R(A)\cap R(B)=\{0\}$.

证明　注意到$A+B=[I_m : I_m]\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$并据推论2得

$$r(A+B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}-dim\left(R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\cap N[I_m : I_m]\right).$$

而$r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r[A' : B']=dimR[A' : B']$

$$=dim(R(A')+R(B'))=dimR(A')+dimR(B')-dim(R(A')\cap R(B'))=r(A)+r(B)-dim(R(A')\cap R(B')),$$

从而得

$$r(A+B)=r(A)+r(B)-dim\left(R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\cap N\right.$$

$$\left.(I_m:I_m)\right)-dim(R(A')\cap R(B')).$$

因此$r(A+B)\leq r(A)+r(B)$。且等号成立的充要条件是$R(A')\cap R(B')=\{0\}$，$R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\cap N[I_m:I_m]$

$$=\{0\}.$$

考虑$r(A'+B')$，得$R(A)\cap R(B)=\{0\}$亦为等号成立的必要条件。然而，当$R(A)\cap R(B)=\{0\}$时，任给$x\in R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\cap N[I_m:I_m]$，有$x=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}t$，且$[Im:Im]$

$$\begin{pmatrix}I & \begin{matrix}A\\B\end{matrix}\end{pmatrix}t=0\Longrightarrow At+Bt=0\Longrightarrow At=B(-t)\in$$

$$R(A)\cap R(B)\Longrightarrow At=-Bt=0\Longrightarrow x=0$$

因此$R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\cap N(I_m:I_m)=\{0\}$。从而得知充要条件为$R(A')\cap R(B')=\{0\}$，$R(A)\cap R(B)=\{0\}$。

证毕！

例7 σ是数域F上的n维向量空间V的线性变换，证明$dimIm(\sigma^2)=dimIm(\sigma)\Longleftrightarrow Im(\sigma)\oplus ker(\sigma)$
$=V$。

证明　由推论1知

$dimIm(\sigma^2)=dimI_m(\sigma)-dim(Im(\sigma)\cap ker(\sigma))$，

则$\dim Im(\sigma^2)=\dim Im(\sigma)\Longleftrightarrow\dim(Im(\sigma)\cap ker(\sigma))=0\Longleftrightarrow Im(\sigma)\cap ker(\sigma)=\{0\}$。结合定理1

$$\dim Im(\sigma)+\dim ker(\sigma)=n,$$

即得

$$\dim Im(\sigma^2)=\dim Im(\sigma)\Longleftrightarrow Im(\sigma)\oplus ker(\sigma)=V.$$

例8　设A为$m\times n$矩阵，$r(A)=l$。从A中任取s行，作一个s行的矩阵B。证明

$$r(B)\geq l+s-m.$$

证明　不妨设取A的$k_1,k_2,\cdots,k_s$行。令$E_s=(a_{ij})_{mn}$，

其中$a_{ij}=\begin{cases}1, & 当i=j=k_t,\ 1\leq t\leq s.\\ 0, & 其余.\end{cases}$

则$r(E_sA)=r(B)$。由推论2得

$$r(E_sA)=r(A)-\dim(R(A)\cap N(E_s)).$$

由$r(E_s)=s$及定理1得：$\dim(N(E_s))=m-s$。而，$R(A)\cap N(E_s)\subseteq N(E_s)$。所以

$$\dim(R(A)\cap N(E_s))\leq m-s.$$

$$\therefore r(B)=r(E_sA)\geq r(A)-(m-s)=l+s-m.$$

例9　设A为n阶复矩阵，则

$$r(A^HA)=r(AA^H)=r(A).$$

其中$A^H=\overline{A}'$（共轭转置）。

证明　由推论2得

$$r(A^HA)=r(A)-\dim(R(A)\cap N(A^H)),$$

故只须证$R(A)\cap N(A^H)=\{0\}$。$\forall X\in R(A)\cap N(A^H)$，则$X=AY$，$A^HX=0$。

$$Y\in C^n\Longrightarrow A^HAY=0\Longrightarrow Y^HA^HAY=0\Longrightarrow AY=0.$$

即得$X=0$，所以$R(A)\cap N(A^H)=\{0\}$。同理可证，$r(AA^H)=r(A)$。证毕！

十三．若当标准形的几个问题

所谓若当标准形问题，包括如下两个方面：一方面，是要证明任意一个n阶复数矩阵都有若当标准形，即证明

定理 每一个n阶复数矩阵A都与一个若当矩阵相似，这个若当形矩阵除去其中若当块的排列次序外是被矩阵A唯一决定的，它称为A的若当标准形。

另一方面，是要给出一个方法，按照这个方法，对任意一个n阶复数矩阵A、都可以求得A的若当标准形B，或者更进一步，求出一个n阶可逆复数矩阵T（这里称为演化矩阵），使得

$$T^{-1}AT=B.$$

1．若当标准形问题的一个初等解法

一般高等代数（或线性代数）教材解决若当标准形问题，都引入了λ—矩陈及其不变因子、初等因子等一系列新的概念和方法，这里提出一个比较初等的方法，它完全建立在向量空间和线性变换基础之上，不需要引入新的知识。

下文所提到的矩阵和向量空间都是复数域上的，而此处所说若当块，形状为

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

我们先证明前述定理。

证明　对矩阵A的阶数n用数学归纳法。

当$n=1$时，一阶矩阵本身可看作若当形矩阵。

设$n>1$且对一切阶数小于n的矩阵都相似于一个若当形矩阵。当矩阵阶数为n时，n阶矩阵设为A。

我们将A看作n维向量空间V的线性变换σ关于基ξ_1，ξ_2，…，ξ_n的矩阵。任取σ的一个特征根λ_0，设α_1是σ的属于特征根λ_0的特征向量，将α_1扩充为V的一个基α_1，α_2，…，α_n，那么σ关于这个基的矩阵是一个与A相似矩阵$\bar{A}$，

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} \lambda_0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

其中A_1为$n-1$阶矩阵，由归纳假设知，存在$n-1$阶可逆矩阵T_1，使

$$T_1^{-1}A_1T_1=\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & J_k \end{pmatrix}$$

为若当形矩阵，令

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

那么T可逆且$T^{-1}\bar{A}T=B$有如下形状：

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & J_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & J_k \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

其中J_i为形如

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

的若当块、因此，存在V的一个基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$，使线性

变换σ关于这个基的矩阵为B。

如果σ至少有两个不同的特征根，不妨设$\lambda_k \neq \lambda_0$，并设J_k的阶数为$n-m$（$1 \leq m \leq n-1$）。

取V的基$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$，使$\gamma_i = \beta_i, i=1, 2, \cdots, m$，$\gamma_j = x_j\beta_1 + \beta_i$，$j=m+1, \cdots, n$，其中$x_{m+1} = \dfrac{b_{1m+1}}{\lambda_k - \lambda_0}$，

$x_j = \dfrac{b_{1j} - x_{1-1}}{\lambda_k - \lambda_0}$，　$j = m+2, \cdots, n$，那么我们将有

$$\sigma(\gamma_{m+1}) = \lambda_k \gamma_{m+1}, \quad \sigma(\gamma_j) = \gamma_{j-1} + \lambda_k \gamma_j,$$

$i = m+2, \cdots, n$。

于是σ关于基$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$的矩阵$C$与$A$相似，且有如下形式

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_0 & b_{12} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ & & & J_{k-1} & & & \\ 0 & & & & & J_k & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & J_k \end{pmatrix},$$

对C_1使用归纳假设，不难证得C（从而A）相似于一个若当形矩阵。

现在设λ_0为σ的n重特征根，则在矩阵B中$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \lambda_0$。我们设$J_2, J_3, \cdots, J_k$的第一列在$B$中的位置分别为第$s_2, s_3, \cdots, s_k$列，分三种情况讨论。

1）如果$b_{12}, b_{1s_2}, \cdots, b_{1s_k}$中至少有一个是零，不

妨设$b_{1s_k}=0$（否则适当调整$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$中向量的次序便可得到这一点），令

$\gamma_i=\beta_i$，$i=1,2,\cdots\cdots,s_k-1$，$\gamma_j=b_{1j+1}\beta_1+\beta_j$，$j=s_k,\cdots,n-1$，$\gamma_n=\beta_n$，那么$\sigma$关于基$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$的矩阵$C$有如下形状：

$$C=\begin{pmatrix} \lambda_0 & b_{12} & \cdots & b_{1s_k-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & J_1 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ & & & & J_{k-1} & & \\ 0 & & & & & & J_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & J_k \end{pmatrix},$$

如同上述，C（从而A）相似于一个若当形矩阵。

2）若矩阵B中，$k=1$而$b_{12}\neq 0$。令

$\gamma_1=\beta_1$，$\gamma_i=x_{i2}\beta_2+x_{i3}\beta_3+\cdots+x_{ii-1}\beta_{i-1}+x_{ii}\beta_i$，$i=2,3,\cdots,n$。

适当选取x_{ij}，使$\sigma(\gamma_i)=\gamma_{i-1}+\lambda_0\gamma_i$，$i=2,3,\cdots,n$，这是可以作到的，事实上，只要令$x_{ii}=-\dfrac{1}{b_{12}}$，并且当$x_{i-1\,2}$，$x_{i-1\,3}$，$\cdots$，$x_{i-1\,i-1}$已求得时，令

$$x_{i2}=-\frac{1}{b_{12}}(x_{i-1\,2}b_{13}+x_{i-1\,3}b_{14}+\cdots+x_{i-1\,i-1}b_{1i})，x_{ij}=x_{i-1\,j-1}，j=3,4,\cdots,i，$$
即可。

则σ关于基$\gamma_1,\gamma_2,\cdots\gamma_n$的矩阵为若当形矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3）若在矩阵B中$k>1$且b_{12}，b_{13}，…，b_{1s_k}均不为零，不妨设J_k的阶数不超过J_1的阶数，并令

$\gamma_i=\beta_i$，$i=1$，2，…，s_{k-1}，$\gamma_{s_k}=\gamma_{s_k 2}\beta_2+\beta_{s_k}$，$\gamma_{s_k+1}=x_{s_k+1,2}\beta_2+x_{s_k+1,3}\beta_3+\beta_{s_k+1}$，…，$\gamma_n=x_{n2}\beta_2+x_{n3}\beta_3+\cdots+x_{n,n-s_k+2}\beta_{n-s_k+2}+\beta_2$，与2）类似，可适当选取$x_{ij}$，使得

$\sigma(r_{s_k})=\lambda_0 r_{s_1}$，$\sigma(\gamma_j)=\gamma_{j-1}+\lambda_0\gamma_j$，$j=s_{k+1}$，…，$n$。于是$\sigma$关于基$\gamma_1$，$\gamma_2$，…，$\gamma_n$的矩阵$C$形状为

$$C=\begin{pmatrix} \lambda_0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1s_k-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & \\ & & & & J_{k-1} & & & \\ 0 & & & & & & J_k & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & J_k \end{pmatrix},$$

进而可证明C（从而A）与一个若当形矩阵相似。

关于与n阶矩阵A相似的若当形矩阵除去若当块的排列次序外，由A所唯一确定的证明此处从略。

下面我们将给出求矩阵的若当标准形方法。

先简要证明下述事实。

命题1 设λ是n阶矩阵A的s（$s\geq1$）重特征根，$r_i=$秩$(\lambda I-A)^i$，i为正整数。那么，

（i）存在正整数k，使$r_k=n-s$，且$r_0>r_1>\cdots>r_k=r_{k+1}$，此处$r_0=n$，$i$为正整数；

（ii）$r_{i-1}-r_i\geq r_i-r_{i+1}$，$i=1$，$2$，…，$k$；

（iii）令$m_i=r_{i-1}-r_i$，那么矩阵A的若当标准形中，与

特征根λ对应的（即主对角线上元素为λ的）若当块阶数不超过k，且t阶若当块有（m_t-m_{t+1}）个t，$=1，2，\cdots，k$。

证明 设矩阵A的若当标准形为B，那么$A\sim B$，从而（$\lambda I-A$）$\sim$（$\lambda I-B$），更一般地，有$(\lambda I-B)^i\sim(\lambda I-B)^i$，$i$为正整数。故秩（$\lambda I-B)^i=r_i$ 。

设在矩阵B中，与特征根λ对应的若当块共l个，其中j阶若当块l_j个，$j=1，2，\cdots,k$，$l=l_1+l_2+\cdots+l_k$，那么可求得

$r_1=n-l, r_2=n-2l+l_1, r_3=n-3l+2l_1+l_2$，一般地，

$$r_i=n-il+(i-1)l_1+(i-2)l_2+\cdots l_{i-1}.$$

所以，$r_k=n-kl+(k-1)l_1+(k-2)l_2+\cdots+l_{k-1}=$

$n-k(l_1+l_2+\cdots+l_k)+(k-1)l_1+(k-2)l_2+\cdots$

$+l_{k-1}=n-l_1-2l_2-\cdots-kl_k=n-s$.

命题中其余结论不难证明。

根据上述命题，求矩阵A的若当标准形可采用如下步骤：

1） 求出矩阵A的所有不同特征根及其重数；

2） 对每一个特征根λ，按命题1所提示的方法确定A的若当标准形中与该特征根对应的各阶若当块的个数；

3） 根据2）的结果写出A的若当标准形。

在2）中，应注意的重点在于矩阵（$\lambda I-A$）^{i}的秩，而不是这个矩阵本身，故可采用下面的办法简化计算。

先对（$\lambda I-A$）施行初等变换，化为B_1，那么秩B_1

$=r_1$，这里$B_1=\begin{pmatrix} I & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。（当然，由于不作列的变换，$B_1$不一定有此整齐的形状，这是无关紧要的）。

把$(\lambda I-A)$左乘以B_1，对所得矩阵施行行的初等变换化为B_2，这时B_2可以看作由$(\lambda I-A)^2$施行行的初等变换的结果，故秩$B_2=r_2$，依次进行直到求得B_k，使秩$B_k=n-s$为止。

现在再讨论演化矩阵的求法。我们将n阶矩阵A看成n元列空间V的线性变换换σ关于标准基ε_1，ε_2，…，ε_n的矩阵，设λ_1，λ_2，…，λ_t为σ的所有不同的特征根。由矩阵A相似于一个若当形矩阵容易证得

命题2　$V=ker(\sigma-\lambda_1)^{k_1}\oplus ker(\sigma-\lambda_2)^{k_2}\oplus\cdots\oplus ker(\sigma-\lambda_t)^{k_t}$。这里$k_i$为$A$的若当标准形中对应于特征根$\lambda_i$的若当块中阶数最大者的阶数。

下面用λ表示σ的任一特征根而用k表示相应的k_i（这里的k与命题1中的k一致）。

显然$ker(\sigma-\lambda)^k$就是齐次线性方程组

$$(\lambda I-A)^k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

的解空间。

要求齐次线性方程组（1）的一个基础解系$\{\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1n_1}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2n_2}, \cdots\alpha_{k1}, \cdots, \alpha_{kn_k}\}$，使得

$(\sigma-\lambda)\alpha_{1j}=0$，$j=1, 2, \cdots, n_1$，$(\sigma-\lambda)\alpha_{ij}=\alpha_{i-1,j}$，$i=2, 3, \cdots, k$，$j=1, 2, \cdots, n_i$。

为此目的，我们首先注意到$ker(\sigma-\lambda)\subseteq ker(\sigma-\lambda)^2\subseteq\cdots ker(\sigma-\lambda)^k$，故可求得（1）的一个基础解系$\{\xi_{11},\cdots,\xi_{1n_1},\xi_{21},\cdots,\xi_{2n_2},\cdots,\xi_{kn_k}\}$，使$\{\xi_{11},\cdots\xi_{1n_1},\cdots,\xi_{i1},\cdots,\xi_{in_i}\}$为齐次线性方程组

$$(\lambda I-A)^i\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

的基础解系，由命题1知$n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_k$。

如果$k>1$，则$(\sigma-\lambda)\xi_{k1},\cdots,(\sigma-\lambda)\xi_{kn_k}$线性无关。用它们替换$\xi_{k-1,1},\cdots,\xi_{k-1,n_{k-1}}$中$n_k$个向量，使所得向量组$\xi'_{k-1,1},\cdots,\xi'_{k-1,n_{k-1}}$线性无关。若$k-1>1$，同样地以$(\sigma-\lambda)\xi'_{k-1,1},\cdots,(\sigma-\lambda)\xi'_{k-1,n_{k-1}}$替换$\xi_{k-2,1},\cdots,\xi_{k-2,n_{k-2}}$中$n_{k-1}$个向量，使所得向量组$\xi'_{k-2,1},\cdots,\xi'_{k-2,n_{k-2}}$线性无关，依次进行下去，最终得到的向量组经重新排列，即为满足条件（2）的一个向量组，容易证明这个向量组线性无关，因而可作为齐次线性方程组（1）的一个基础解系。

把对每一个特征根求得的相应的齐次线性方程组（1）的满足（2）的基础解系放在一起，适当排成$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,$

a_n，使得每一向量a_i或者是σ的一个特征向量，或者满足（$\sigma-\lambda$）$a_i=a_{i-1}$，即σ（a_i）$=a_{i-1}+\lambda a_i$。

以a_1，a_2，…，a_n为列作成矩阵T，则T可逆，且$T^{-1}AT$为A的若当标准形。

2．避开求初等因子化为矩阵若当形

化一个一般n阶方阵为若当标准形，目前一般的线性代数、高等代数教材，大都利用初等因子方法，但无理论证明或实际计算。有的教材，从理论证明到实际计算，完全抛开初等因子，由计算（$A-\lambda E$）的各次乘幂的二阶差分，来确定若当形，其理论部分要另砌炉灶，实际计算要做较多的矩阵乘法。下面我们避开求初等因子的繁杂运算，利用矩阵的若当形和它的特征根、特征向量间的联系，用循环向量法求若当形，理论部分仍借用现有教材中的初等因子理论。

定义 设λ_0是n阶方阵A的一个特征值，P_0是A的属于特征值λ_0的特征向量，若有k个非零向量P_1，P_2…，P_k使得

$$(\lambda_0E-A)P_i=-P_{i-1}\quad(i=1,2\cdots,k),$$

则称P_1，P_2，…，P_k为P_0的循环向量。

命题 （1）某个特征向量的循环向量的个数加上1等于它所对应的若当块的阶数。（2）所有的特征向量和它们的循环向量组成演化矩阵P。

证明 设n阶方阵A相似于若当标准形J，即有可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=J\quad（即\quad AP=PJ）$$

其中

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}, \quad 而\ J_k=\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix},$$

$(k=1, 2, \cdots, r)$

λ_1，λ_2，……λ_k是A的特征值。

若P_1，$P_2\cdots$，P_n是演化矩阵P的n个列向量，则

$$A(P_1, P_2, \cdots, P_n)=(P_1, P_2, \cdots, P_n)J$$

设J_k的左上角第一个λ_k位于若当形J的第j_k行j_k列，J_k是n_k阶若当块。则由矩阵的乘法可得

$$AP_{j_k}=P_{j_k}\lambda_k,$$

$$AP_{j_k+1}=P_{j_k}+\lambda_k P_{j_k+1},$$

$$AP_{j_k+2}=P_{j_k+1}+\lambda_k P_{j_k+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$AP_{j_k+(n_k-1)}=P_{j_k+(n_k-2)}+\lambda_k P_{j_k+(n_k-1)}$$

于是

$$(\lambda_k E-A)P_{j_k}=O,$$

$$(\lambda_k E-A)P_{j_k+1}=-P_{j_k},$$

$$(\lambda_k E-A)P_{j_k+2}=-P_{j_k+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(\lambda_k E-A)P_{j_k+(n_k-1)}=-P_{j_k+(n_k-2)}$$

因此P_{j_k}就是A的特征值λ_k的一个特征向量。而向量P_{j_k+1}，P_{j_k+2}，$\cdots$，$P_{j_k+(n_k-1)}$就是P_{j_k}的循环向量。所以A的特征向量的个数就是A的若当块的个数r，第k个特征向量P_k的循环向量的个数加上1就是A的第k个若当块的阶数n_k。所有的

特征向量和它们的循环向量组成了演化矩阵P。

例 1 设五阶方阵A如下，求A的若当标准形。

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&-2&3&-3\\0&0&-1&2&-2\\1&-1&1&0&1\\1&-1&1&-1&2\end{pmatrix}$$

解 由于$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^4(\lambda+1)$，因此$A$的特征根$\lambda_1=1$（重数是4），$\lambda_2=-1$（单根）

对于$\lambda_1=1$，求解方程$(\lambda_1E-A)u=0$ 得属于$\lambda_1=1$的两个线性无关的特征向量$\alpha_1=(1,1,0,0,0)$，$\alpha_2=(0,0,0,1,1)$。

令$P_1=\alpha_1'$，由$(\lambda_1E-A)P_2=-P_1$解得P_1的循环向量是$P_2=(0,0,1,1,0)'$。再设$(\lambda_1E-A)P_3=-P_2$，此方程无解，表明$P_1=\alpha_1'$已无循环向量，而演化矩阵P的第三列向量$P_3=\alpha_2'$。

A的若当标准形只能是

$$J=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

若再设$(\lambda E-A)P_4=-P_3$，可解得$P_4=(1,0,0,0,0)'$。对于$\lambda_2=-1$，$(\lambda_2E-A)u=0$的线性无关的解是$\alpha_3=(0,1,1,0,0)$。令$P_5=\alpha_3'$，即得演化矩阵

$$P=(P_1, \cdots, P_5)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},$$

使$P^{-1}AP=J$。

例2　求下矩阵A的若当标准形。

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$$

解　$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&2&-6\\1&\lambda&-3\\1&1&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3,$$

则A有三重特征根$\lambda=1$。

解方程$(1\cdot E-A)\cdot u=0$，得两个线性无关的特征向量 $\alpha_1=(-1, 1, 0)$，$\alpha_2=(3, 0, 1)$，则A的若当标准形是

$$J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

由于方程$(1\cdot E-A)u=-\alpha_1'$，$(1\cdot E-A)u=-\alpha_2'$均无解，故可令$P_1=\alpha_1'$，$P_2=c_1\alpha_1'+c_2\alpha_2'=(-c_1+3c_2, c_1, c_2)'$，$c_1$，$c_2$为非零常数。则由$(1\cdot E-A)u=-P_2$，得$u=P_3=(-c_2, 0, 0)'$，且$c_1=c_2$。取$c_1=c_2=1$，则$P_2=(2, 1, 1)'$，$P_3=(-1, 0, 0)'$，于是有

$$P=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}，使 P^{-}AP=J$$

3．若当标准形一个老的证明

这里介绍的一个矩阵若当标准形的证明方法，是一个极妙的简单证明。因为它的证明，从开始到结束，仅用了归纳和高斯消元法。

下述的讨论全限制在复数域中。

1)．基本知识

1°．

令 $$P_{ij}=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \overset{i}{0} & \cdots & \overset{j}{1} & & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}_{n\times n}\begin{matrix}\\ \\ i\\ \\ \\ \\ j\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$P_i(k)=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & k & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}_{n\times n}\ i \qquad k\neq 0$$

（第 i 列）

$$P_{ij}(h)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & h & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

（h 位于第 i 行第 j 列）

称P_{ij}为换法矩阵，$P_i(k)$为倍法矩阵，$P_{ij}(h)$为消法矩阵，易证：$P_{ji}^{-1}=P_{ji}$，$P_i^{-1}(k)=P_i(1/k)$，

$P_{ij}^{-1}(h)=P_{ij}(-h)$

2°. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$

令P是若干个换法矩阵的乘积，若$P^{-1}AP=B$，则称A置换相似于B。

令D是若干个倍法矩阵的乘积，若$D^{-1}AD=B$，则称A对角相似于B。用$diag(d_1, d_2, \cdots d_n)$表示$n\times n$阶对角矩阵，其对角元为$d_1$，$d_2$，$\cdots d_n$。

特别地，若

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其 $a_{i,i+1} \neq 0$ ($i = 1, \cdots, n-1$)，只要我们取 $D = diag(1, 1/a_{12}, 1/a_{12}a_{23}, \cdots 1/a_{12}, \cdots a_{n-1\,n})$，则

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\,n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

令 T 是若干个消法矩阵的乘积，若 $T^{-}AT = B$，则称 A 组合相似于 B。

我们看一下 A 经过一次组合相似是如何得到 B 的。

$$P_{ij}^{-1}(h)AP_{ij}(h) = P_{ij}(-h)AP_{ij}(h) = B(i \neq j)$$

$$i\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & -h & \\ & & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & h & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} i = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} i$$

（此图示为上三角阵的一个组合相似）

它是把A的第i列的h倍加到到第j列 上 去， 然 后 再 把$AP_{ij}(h)$的第j行的$(-h)$倍加到第i行上去而得到B， 特别地，若A是一个上三角阵，且$i<j$，则$P_{ij}^{-1}(h)AP_{ij}(h)=B$也是一个上三角阵，而它仅在第i行第$j$，$j+1$，…$n$列 位置上和第$j$列第1，2…，$i$行位置的元与$A$不同，其 他 元 不变。如图（1）所示。

B的第(i, j)元，可由下式给出。

$b_{ij}=a_{ij}+h(a_{ii}-a_{jj})$ $(i<j)$ （1）

这 样，如果$a_{ii}\neq a_{jj}$，我们可选择$h=-a_{ij}/(a_{ii}-a_{jj})$及$b_{ij}=0$。

3°、一般地称A相似于B是存在可逆距阵P，使$P^{-1}AP=B$，因为一个可逆阵是初等矩阵的乘积，所以矩阵A与矩阵B相似的充要条件是A经过一系列的置换相似，对角相似 和 组合相似而的到B

2）。若当标准形的证明

定理1 （*Jacobi*）任一$n\times n$复数阵都相似于 一 个 上

三角矩阵T，且T的对角线元是A的n个特征值，并可适当选择T，使这些特征值，按指定的次序出现在主对角线上。

本定理的证明在一般的线性代数教科书中都可以找到，故略去不证。

定义 如下形式的$k\times k$阵

$$J_k(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix}，\text{这里}J_1(a)=a,$$

叫做一个若当块。

定理2 任一个$n\times n$复数矩阵A相似于这样一个矩阵，这个矩阵是若当块的直和。

证明 分三步，设$A=(a_{ij})_{n\times n}$。

i)。 由定理1，存在一个可逆阵P，使$P^{-1}AP=T$，T是一个上三角矩阵，相等的对角元连续地排在一起，由于矩阵的相似是一个等价关系，具有传逆性，因此我们下面仅对T进行论证就可以了。

ii)。假设T的对角线上至少有两个不同的元，这时T有以下形状：

$$T=\begin{pmatrix} T_1 & x \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}，x=\begin{pmatrix} x_{1s+1} & \cdots & x_{1n} \\ x_{ss+1} & \cdots & x_{sn} \end{pmatrix}$$

$(1\leq s<n)$

这里T_1是对角元为a的上三角矩阵，T_2也是上三角矩阵，但其对角线上的元都不等于a，利用上面所说的组合相以（图1）及（1）式，能使x的每一个元都变成零而不改变T_1和T_2，我们可以按照$x_{ss+1}\rightarrow x_{ss+2}\rightarrow\cdots x_{sn}\rightarrow x_{s-1s+1}\rightarrow\cdots$

$x_{s-1n}\to\cdots x_{1n}$的次序，一个一个地使x_{ij}变为零，而不改变T_1和T_2，这样T就相似于T_1和T_2的直和。如果T_2的对角元不全相同的话，我们可以重复这些步骤于T_2，继续下去，最后我们可得到T相似于上三角矩阵的直和，而每一个上三角矩阵其对角元是同一常数，且与其他的上三角矩阵的对角元均不等。那么，只要证明能把直和中的每一个上三角矩阵，相似变换成若当标准形，也就能把T变成了若当标准形。下面我们就假设T是一个对角线上元都相等的上三角阵。

iii)．设

$$T=\begin{pmatrix} a & & * \\ & a & \\ & & \ddots \\ 0 & & a \end{pmatrix}_{n\times n}$$

对于T的阶数n用数学归纳来证明T相似于若当标准形。从而完成定理2的证明。

当$n=1$时，$T=(a)$，它已是若当标准形。

当$n=2$时，这时

$$T=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

如果$b=0$，T已是若当标准形。如果$b\neq 0$，取$P_1(b)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/b \end{pmatrix}$，则$P_1^{-1}TP=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$，它就是若当标准形。

现在假设T的前$(n-1)\times(n-1)$主子阵s，相似于一个若当标准形F，即存在一个可逆矩阵Q，使$Q^{-1}SQ=F$

令$P=\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 则，$P^{-1}TP=T_1$，　　其中

$$
T_1 = \left(\begin{array}{c|c}
F & \begin{matrix} * \\ * \\ \vdots \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\
\hline
0 \cdots 0 & a
\end{array}\right)_{n \times n}
$$

F是$(n-1)\times(n-1)$若当标准形。首先假设在T_1的最后一列除对角元a外有一个非零元h，且h与F的某一若当块中某个1位于同一行上，设h在等i行上。

为说明问题我们举例

$$
设T_1 = \left(\begin{array}{cc|cccc|c}
a & 1 & & & & & * \\
0 & a & & & & & * \\
\hline
 & & a & 1 & & & * \\
 & & & a & 1 & & h \\
 & & & & a & 1 & * \\
 & & & & & a & * \\
\hline
 & & & & & & a
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ \\ i=4 \\ \\ (2.1) \\ \\ \end{array}
$$

T_1中没出现的元均是零。我们证明，可以通过相似变换消去这个h（h在T_1的最后一列且与一个1位于同一行）。事实上，T_1的第5列的$(-h)$倍加到第7列和第7行的h倍加到第5行上去的组合相似，就能使h变为零，而T_1的其

他元均无变化，对于一般的T_1。①设h位于第i行，则T_1的第$i+1$列的（$-h$）倍加到第n列和第n行的h倍加到第$i+1$行上去的组合相似，能使这样的h变成零，而T_1的其他元均无变化，这样经过一系列相应的组合相似，可消去所有这样的不等于零的h，而得到一个上三角矩阵T_2，T_2与T_1的前（$i-1$）×（$i-1$）主子阵具有相同的F，而在每一行里的非对角线元素至多有一个不等于零。

如上面（2.1）那个矩阵T_1，可相似变换成

$$T_2=\left(\begin{array}{cc|cccc|c} a&1&&&&&0\\ &a&&&&&s\\ \hline &&a&1&&&0\\ &&&a&1&&0\\ &&&&a&1&0\\ &&&&&a&t\\ \hline &&&&&&a \end{array}\right). \qquad (2.2)$$

如果T_2的最后一列里非对角元均为零，则T_2已经是若当标准形了。

若T_2的最后一列非对角元，仅有一个元不等于零，实质上它也已是若当标准形了。事实上，如果这个元不在（$n-1,n$）位置，则把这个元所在行的那块若当块，经过置换相似，交换到F的右下角，这个不等于零的元也相应地变换到了（$n-1,n$)位置，这个元若不等于1，则可用对角相似把它变成1，这就成了若当标准形。

若T_2的最后一列中非对角元至少有两个元不等于零，我

们来说明在这种情况下，可以通过相似变换使T_2的最后一列的非对角元除了一个元外，均变成零，而不改变T_2的其他元。

步骤是这样的：①先比较一下最后一列里不等于零的非对角元所在行的若当块的阶数，把阶数最大的若当块（阶数相同可任取一个）通过置换相似变到F的右下角，这个若当块所对应的最后一列不等于零的那个数也随之变换到第（$n-1$，n）位置。②用对角相似把第（$n-1$，n）元变为1，这时我们把矩阵仍记作T_2。③通过组合相似把非对角元最后一列中其他不等于零的数全消成零。这就完成了定理的证明。

我们仍以（2.2）中的T_2为例来说明。下面这一进程显然对一般的T_2也是适用的。

对于（2.2）的T_2可利用一个对角相似，使$t=1$，然后连续地施行下列组合相似：（i）把第六行的（$-s$）倍加到第二行上，再把第二列的s倍加到第六列上去，（ii）把第五行的（$-s$）倍加到第一行上，再把第一列的s倍加到第五列上去，这样就把s变成零，且没有改变T_2的其他元，T_2就变成了$J_5(a)$和$J_2(a)$和直和，即是若当标准形。

时于一般的T_2，可以用相应的组合相似方法一个一个消去矩阵T_2的最后一列非对角元不等于零的数，直至剩下一个不等于零为止，这时矩阵已是若当标准形了。定理2证毕。

十四、欧氏空间中正交变换的两个问题

1. 欧氏空间的变换是正交变换的条件

以下总设V是一个欧氏空间（维数不限）。

定理1 设σ是V的一个变换，若对任意ξ、$\eta\in V$，都有

$$|\sigma(\xi)+\sigma(\eta)|=|\xi+\eta| \qquad (1)$$

则σ是V的一个正交变换。

证明 在（1）中取$\xi=\eta=0$，得$|2\sigma(0)|=|0|=0$，从而$\sigma(0)=0$。在（1）中取$\eta=0$，则由$\sigma(0)=0$，得$|\sigma(\xi)|=|\xi|$，即σ是V的一个保长度变换。下证$\sigma\in L(V)$

在（1）中取$\eta=-\xi$，得$|\sigma(\xi)+\sigma(-\xi)|=0$，所以

$$\sigma(-\xi)=-\sigma(\xi) \qquad (2)$$

对任意ξ，$\eta\in V$，由（1），（2），得

$$\begin{aligned}|\sigma(\xi)-\sigma(\eta)|&=|\sigma(\xi)+\sigma(-\eta)|\\&=|\xi-\eta| \qquad (3)\end{aligned}$$

另外，由

$$\begin{aligned}|\xi+\eta|^2-|\xi-\eta|^2&=(\xi+\eta,\xi+\eta)-(\xi-\eta,\xi-\eta)\\&=(\xi,\xi)+2(\xi,\eta)+(\eta,\eta)-(\xi,\xi)+2(\xi,\eta)\\&\quad-(\eta,\eta)\\&=4(\xi,\eta)\end{aligned}$$

得

$$(\xi,\ \eta)=\frac{1}{4}(\ |\xi+\eta|^2-|\xi-\eta|^2) \qquad (4)$$

由（3），（4）可得

$$[\sigma(\xi),\ \sigma(\eta)]=\frac{1}{4}[\ |\sigma(\xi)+\sigma(\eta)|^2$$

$$-|\sigma(\xi)-\sigma(\eta)|^2]$$

$$=\frac{1}{4}(\ |\xi+\eta|^2-|\xi-\eta|^2)=(\xi,\ \eta),$$

即σ保持V中向量的内积，不变。于是

$$[\sigma(\xi+\eta)-\sigma(\xi)-\sigma(\eta),\ \sigma(\xi+\eta)-\sigma(\xi)$$

$$-\sigma(\eta)]$$

$$=\sigma[(\xi+\eta),\ \sigma(\xi+\eta)]-2[\sigma(\xi+\eta),\ \sigma(\xi)]$$

$$-2[\sigma(\xi+\eta),\ \sigma(\eta)]+[\sigma(\xi),\sigma(\xi)]$$

$$+2[\sigma(\xi),\ \sigma(\eta)]+[\sigma(\eta),\ \sigma(\eta)]$$

$$=[\xi+\eta,\ \xi+\eta]-2[\xi+\eta,\xi]-2[\xi+\eta,\eta]+[\xi,$$

$$\xi]+2[\xi,\eta]+[\eta,\ \eta]=0$$

由此得$\sigma(\xi+\eta)-\sigma(\xi)-\sigma(\eta)=0$，即

$$\sigma(\xi+\eta)=\sigma(\xi)+\sigma(\eta) \qquad (5)$$

同理可证，对任意，$a\in R$，$\xi\in V$，有

$$\sigma(a\xi)=a\sigma(\xi) \qquad (6)$$

（5），（6）表明$\sigma\in L(V)$，因而σ是V的一个正交变换。

不难看出，定理1的逆也成立，即条件（1）是欧氏空间V的变换σ是正交变换的一个充要条件。

条件（1）的几何意义是σ“保持以V中任二向量为邻边的平行四边形的对角线之长不变”（以下简称σ保对角线长）。这一事实启发我们作如下思考：如果V的一个变换σ既

是保长度变换又是保夹角变换（即σ保持V中任二非零向量间的夹角不变，那么σ就应该保对角线长，从而σ是一个正交变换。事实正是过样：

定理2 设σ是V的一个变换。如果σ既是保长度变换又是保夹角变换，那么σ必为正交变换。

证明 设ξ，$\eta\in V$，$\xi\neq\eta\neq 0$时，由

$$|\sigma(\xi)|=|\xi|,\quad |\sigma(\eta)|=|\eta|,$$

$$\frac{[\sigma(\xi),\ \sigma(\eta)]}{|\sigma(\xi)|\ |\sigma(\eta)|}=\frac{[\xi,\ \eta]}{|\xi|\ |\eta|}$$

得 $$[\sigma(\xi),\ \sigma(\eta)]=[\xi,\ \eta]$$

当ξ与η中至少有一个是零向量时上式显然成立。故由定理1的证明，σ是V的一个正交变换。

〔注〕 欧氏空间的保长度变换不一定是正交变换，例如，在欧氏空间R^2中，定义

$$\sigma(x_1,\ x_2)=\begin{cases}(x_1,\ x_2) & (\text{若}x_1x_2\neq 0),\\ (x_2,\ x_1) & (\text{若}x_1x_2=0)。\end{cases}$$

则σ是R^2的一个保长度变换（而且σ是个一一变换），但因

$$\sigma[(1,\ 0)+(1,\ 1)]=(2,\ 1)\neq(1,\ 2)\neq\sigma(1,\ 0)+\sigma(1,\ 1)$$

之故，$\sigma\overline{\in}L(V)$，从而σ不是R^2的正交变换。

V的保夹角变换也不一定是正交变换，例如

$$\sigma(\xi)=k\xi\qquad(\xi\in V,\ k\in R,\ k\neq 0,\ \pm 1)$$

是V的一个保夹角变换，但σ不是保长度变换，所以不是正交变换。

2. 用正交变换化实二次型为标准形方法的改进

设A为一$n\times n$实对称矩阵，求一正交矩阵P使$P'AP$为对角阵，其中P'表示P的转置（这等价于经过正交变换$X=PY$，将二次型$X'AX$化为标准型）。

求解上述问题的一般步骤为：

1）令$|\lambda E-A|=0$，求得A的不同特征根λ_1，…，λ_s，λ_i的重数为k_i，$\sum_{i=1}^{s}k_i=n$

2）解方程组（λ_iE-A）$X=0$，求得一组基础解系α_{i1}，…，α_{ik_i}，$1\leq i\leq s$，这里α_{ij}为列向量。

3）对α_{i1}，…，α_{ik_i}进行施密特正交化过程，得到k_i个属于λ_i的相互正交的特征向量β_{i1}，…，β_{ik_i}，$1\leq i\leq s$。

4）将β_{ij}单位化得$\gamma_{ij}=\dfrac{\beta_{ij}}{|\beta_{ij}|}$，$1\leq i\leq s$，$1\leq j\leq k_i$

5）令$P=(\gamma_{11}, \cdots, \gamma_{1k_1}, \cdots, \gamma_{s1}, \cdots \gamma_{sk_s})$则$P$为正交阵，且

$$P^{T}AP=\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \quad \lambda_1 \quad \ddots \quad \lambda_1}^{k_1} & & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \overbrace{\lambda_s \quad \ddots \quad \lambda_s}^{k_s} \end{pmatrix}$$

上述求解过程中较繁的是第3)步——施密特正交化过程。现将施密特正交化过程叙述如下：

设 α_1, …, α_m为一组无关向量，令

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_k=\alpha_k-\frac{(\alpha_k,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_k,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha\ ,\beta_{k-1})}{(\beta_{k-1},\beta_{k-1})}$$

β_{k-1}，则β_1，…，β_m彼此正交。〔$2\leq k\leq m$，(*)〕

公式(*)较繁，较易忘记。由于已有定理保证方程组$(\lambda_i E-A)X=0$一定有k_i个彼此正交的解，可以想到将上面2)，3)合并成一步来做，直接从方程组$(\lambda_i E-A)X=0$求解出k_i彼此正交的特征向量β_{i1}，…β_{ik_i}。因此可以用解齐次方程组来取代较繁的施密特正交化过程。求解齐次方程组对学生来说是件易事。这里提出的方法，一可以使问题求解得到简化，二可以活跃学生思想。下面阐述这个方法的具体步骤。

设A为一 $n\times n$ 实对称矩阵，并设$\lambda_1,\cdots$，λ_s为A的不同特征根，λi的重数为k_i，$\sum\limits_{i=1}^{s}=n$。我们知道A一定有ki个彼此正交的特征向量，它们可以由方程组$(\lambda_i E-A)X=0$求得。

对特征根λ_1，由方程$(\lambda_1 E-A)X=0$求得一非零解α_{11}

再由方程 $\begin{cases}(\lambda_1 E-A)X=0\\ \alpha_{11}{}^T X=0\end{cases}$

求得一非零解α_{12}，则α_{11}，α_{12}正交，再由方程组

$$\begin{cases}(\lambda_1 E - A)X = 0\\ \alpha_1{}^T X = 0\\ \alpha_{12}{}^T X = 0\end{cases}$$

求得一非零解α_{13}，则α_{11}，α_{12}，α_{13}彼此正交，重复这一步骤，便可求得属于λ_1的k_1个彼此正交的特征向量α_{11}，α_{12}，…，α_{1k_1}

对$\lambda_i(2\leq i\leq s)$用λ_1情形相同方法，可求得属于λ_i的k_i个彼此正交的特征向量α_{i1}，…，α_{ik_i}.最后将α_{ij}单位化得γ_{ij}，$1\leq i\leq s$，$1\leq j\leq k_i$，令$P=(\gamma_{11}, \cdots, \gamma_{1k_1}, \cdots, \gamma_{s1}, \cdots, \gamma_{sk_s})$，则$P$为正交矩阵，且

$$P'AP=\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \quad \ddots \quad \lambda_1}^{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overbrace{\lambda_s \quad \ddots \quad \lambda_s}^{k_s}\end{pmatrix}$$

下面通过两例说明上述方法

例1　求正交矩阵P使$P'AP$为对角阵，其中

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

解：1）求A的特征根。

由 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-8)$ 得 A 的不同特征根为 2（二重），8。

2） 求 $\lambda=2$ 的特征向量

解方程组 $(2E-A)X=0$，由

$$2E-A\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad(1)$$

可求得一解 $\alpha_1=(-1,\ 1,\ 0)^T$；

解方程组 $\begin{cases}(2E-A)X=0\\ \alpha_1{}^TX=0\end{cases}$

$$\text{系数矩阵}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad(2)$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

于是又求得一解 $\alpha_2=(-1,\ -1,\ 2)'$.则 α_1，α_2 正交。

3） 求 $\lambda=8$ 的特征向量。

解方程组 $(8E-A)X=0$，由

$$8E-A\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

求得一解 $\alpha_3=(1,1,1)'$。

4）将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$单位化得

$$\gamma_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)',$$

$$\gamma_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)',$$

$$\gamma_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)',$$

5）令

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

则P为正交矩阵，且

$$P'AP\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 8\end{pmatrix}.$$

由上例过程，如果熟练的话，在求得α_1后，由α_1及(1)可直接化简(2)求得α_2。

例2　求正交矩阵P使$P'AP$为对角阵，其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

解：1）求A的特征根。

由$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^3(\lambda-3)$得$A$的不同特征根为1(三重)，-3。

2） 求$\lambda=1$的特征向量

由

$$E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得一特征向量$\alpha_1=(1,1,0,0)'$；

由

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得到第二个特征向量$\alpha_2=(1,-1,2,0)'$；

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到第三个特征向量 $\alpha_3=(-1, 1, 1, 3)'$

从以上过程知 α_1, α_2, α_3彼此正交。

3) 求 $\lambda=-3$的特征向量

$$由\ -3E-A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得一特征向量 $\alpha_4=(1, -1, -1, 1)'$。

4) 将 α_1, α_2, α_3, α_4单位化得

$$\gamma_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)',$$

$$\gamma_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)',$$

$\gamma_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}}\right)'$,

$\gamma_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$,

5）令

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

则P为正交阵，且

$$P'AP = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}$$

十五、矩阵的广义逆
和正定矩阵的推广

矩阵的广义逆是一种新的数学工具，它在代数和其它数学分支中有着广泛的应用。

正定矩阵的研究是从二次型和Hermite型的研究开始的，这种研究只限于实对称矩阵和Hermite矩阵。随着数学本身的发展以及应用矩阵的其它学科的需要，开始了并非对称的较为广义的正定矩阵的研究。

这里只介绍矩阵广义逆的基本理论和方法以及正定矩阵的几种主组推广。

1. 矩阵的广义逆

首先回顾一下矩阵逆的基本概念

对$\underset{n\times n}{A}$如果存在$\underset{n\times n}{B}$，使得$AB=BA=I$，则称B为A的逆。记做A^{-1}，也就是$AA^{-1}=A^{-1}A=I$,这时也称A是可逆的。A可逆的充要条件是$|A|\neq 0$。

1955年，彭诺斯（Penrose）提出，如果某个X满足下述方程中的某几个，就称它为A的某几条的广义逆。

$$AXA=A \qquad (1)$$

$$XAX=X \qquad (2)$$

$(AX)' = AX$ （3）

$(XA)' = XA$ （4）

以上四个方程是对任意复数矩阵而言的，称为Moore－Penrose方程。本文只讨论实数矩阵。

例如，有某个X，只满足（1）式，则称X为A的{1}广义逆，记为$X \in A\{1\}$。如果另一个Y满足（1）、（2），则称Y为A的{1，2}广义逆。记为$Y \in A\{1, 2\}$。若$X \in A\{1, 2, 3, 4\}$，则称X为A的Moore－Penrose广义逆。

Ⅰ．减加逆

1． **定义**任给$\underset{n \times m}{A}$，如果存在$\underset{m \times n}{X}$，满足$AXA = A$，则称X为A的一个{1}广义逆，简称减号逆。并记它们的全体为$A\{1\} = \{X \mid AXA = A\}$。 （5）

$A\{1\}$中的元素，记为A^-，如果有不同的元素，则用A^-_1，A^-_2…区别。

2°．A^-的存在性

引理 设$\underset{n \times m}{A} = \underset{n \times n}{P} B_{m \times m}\underset{m \times m}{Q}$，其中$P$、$Q$都是满秩方阵，那么$X \in A\{1\} \Longleftrightarrow QXP \in B\{1\}$。

证： $X \in A\{1\} \Longleftrightarrow AXA = A$

$$\Longleftrightarrow (PBQ)X(PBQ) = PBQ$$

$$\Longleftrightarrow B(QXP)B = B$$

$$\Longleftrightarrow QXP \in B\{1\}.$$

这说明，两个等价矩阵A，B，如果其中一个的减号逆

可求出来，另一个的减号逆也可以求出来。

定理1（存在性）：任给矩阵$\underset{n\times m}{B}$，那么$B\{1\}$一定存在。

证：分两种情况，如果$rK(B)=0$，即$B=\underset{n\times m}{0}$，这时$B\{1\}=R_{m\times n}$。

再设$rk(B)=r>0$，那么，存在满秩矩阵$\underset{n\times n}{P}$与$\underset{m\times m}{Q}$，使得 $PBQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A$，于是

$$A\{1\}=\left\{\begin{pmatrix} I_r & * \\ * & * \end{pmatrix}\middle|\ *\text{为任意实数}\right\} \quad (6)$$

由引理得

$$B\{1\}=\left\{Q\begin{pmatrix} I_r & * \\ * & * \end{pmatrix}P\ \middle|\ *\text{为任意实数}\right\} \quad (7)$$

由于（6）存在，从而证得（7）存在。

例　设$\underset{n\times m}{0}$是零矩阵，那么$0\{1\}=R_{m\times n}$。　　（8）

其中$R_{m\times n}$表示一切实矩阵。

证：由定义知$0\{1\}\subseteq R_{m\times n}$

其次，任意$\underset{m\times n}{X}\in R_{m\times n}$

$\therefore OXO=0 \quad \therefore X\in O\{1\}$.

即$R_{m\times n}\subseteq O\{1\}$.

例2 设 $\underset{n\times m}{A}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，那么

$$A\{1\}=\left\{\begin{pmatrix} I_r & * \\ * & * \end{pmatrix} \ast \text{为任意实数}\right\}$$

这说明，A的减号逆存在，而且不唯一。

证：对任意$\begin{pmatrix} I_r & * \\ * & * \end{pmatrix}$都有

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & * \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} I_r & * \\ * & * \end{pmatrix}\in A\{1\}。$$

反之，对任意 $X=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$，满足

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

必须有$X_1=I_r$，即X为$\begin{pmatrix} I_r & * \\ * & * \end{pmatrix}$的形状。

例3　设$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$，求$A\{1\}$

解：∵ $\left(\begin{array}{c|c} A & I_2 \\ \hline I_3 & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1\\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ \hline -3 & -7 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ \hline -3 & -2 & -7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -3 & -2 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} -3 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PAQ = (I_2,\ 0) = B$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad Q = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$但\quad B\{1\}=\left\{\left(\begin{matrix}1&0&\bullet\\0&1&\bullet\end{matrix}\right)\middle|\ \bullet为任意实数\right\}$$

$$\therefore A\{1\}=\left\{Q\left(\begin{matrix}1&0&\bullet\\0&1&\bullet\end{matrix}\right)'P\ \middle|\ \bullet为任意实数\right\}$$

3 . A^-唯一的条件

定理2 A^{-1}唯一$\Longleftrightarrow A$是方阵，且A^{-1}存在。

证： 先证，$A\{1\}=\{A^{-1}\}$是单元素集，显然

$A^{-1}\in A\{1\}$。

另外，任取$X\in A\{1\}$，由定义

$$AXA=A$$

在等式两端左右乘A^{-1}，得

$X=A^{-1}$，充分性得证。

再证必要性，设$rk(A)=r$，那么$r>0$，因为，如果$r=0$，由例1知A^{-1}不可能唯一。

下面先证A是方阵，若A是$n\times m$矩阵，且$rk(A)=r$，且$m\neq n$，则经初等变换，A可变为下列三种矩阵之一（即PAQ等于三者之一）：

$$\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}I_r&0\end{pmatrix}_{n\times m},\quad \begin{pmatrix}I_r\\0\end{pmatrix}_{n\times m}\qquad (9)$$

但（9）式中每一个一定有0，不会空缺（$\because m\neq n$）这样由定理1知$A\{1\}$就等于下面三集之一：

$$\left\{ Q\begin{pmatrix} I_r & * \\ * & * \end{pmatrix}P \;\middle|\; *\text{为任意实数} \right\}$$

$$\left\{ Q\;(I_r \quad *)\;P \;\middle|\; *\text{为任意实数} \right\}$$

$$\left\{ Q\begin{pmatrix} I_r \\ * \end{pmatrix}P \;\middle|\; *\text{为任意实数} \right\}。$$

这都与A^{-1}唯一性（即$A\{1\}$是单元素集）矛盾，所以$n=m$。

再证 $rk(A)=n$，设：若 $rk(A)=r<n$，那么

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 其中P、Q是满秩方阵，那么

$$A\{1\}=\left\{ Q\begin{pmatrix} I_r & * \\ * & * \end{pmatrix}P \;\middle|\; *\text{为任意实数} \right\}$$ 也

矛盾。

从而 $rk(\underset{n\times n}{A})=n$，即$A^{-1}$存在。

4°. A^-的主要性质

定理3 1）$rk(A^-)\geq rk(A)$，对任意$A^{-1}\in A\{1\}$成立。

2）$rk(A)=rk(AA^-)=rk(A^-A)$

证：1）由于$AA^-A=A$ 即有 $rk(A)\leq rk(A^-)$

2）由于$AA^-A=A$ 那么

$rk(A)\leq rk(AA^-)\leq rk(A)$

所以$rk(A)=rk(AA^-)$

这个定理说明，$A\{1\}$ 不是单元素集时，各元素的秩可以不同，但不会小于 $rk(A)$。

定理4 设有 $\underset{n\times m}{A}$，那么

1）AA^-，A^-A，I_n-AA^-，I_m-A^-A 都是投影阵。

2）$R(A)=R(AA^-)$，$N(A^-A)=N(A)$

3）$AA^-=P_{A,\ I-AA^-}$

证 1）$(AA^-)^2=(AA^-A)A^-=AA^-$，所以 AA^- 是投影阵，从而 I_n-AA^- 也是投影阵。同理可证另两式。

2）因为 $A=AA^-A$，所以

$R(A)\subseteq R(AA^-)\subseteq R(A)$，故 $R(A)=R(AA^-)$。

又因为 $N(A)=N(AA^-A)\subseteq N(A^-A)\subseteq N(A)$

故 $N(A^-A)=N(A)$。

3）在1）中已证 AA^- 是投影阵，又因为

$AA^-=P_{R(AA^-),\ R(I-AA^-)}=P_{R(A),\ R(I-AA^-)}$

类似地，其它三个也可写成这种形状，例如：$I-AA^-=P_{R(I-AA^-),R(AA^-)}=P_{R(I-AA^-),R(A)}=P_{I-AA^-,A}$。

如果把条件加强一些，可以得到更好的结论。

推论1 若 $(AA^-)'=AA^-$ 则 $AA^-=P_A$ (10)

推论2 若 $(A^-A)'=A^-A$，则 $A^-A=P_{A'}$。

证 由于 AA^- 是投影阵，再由题设知 AA^- 是正交投影阵，所以

$AA^-=P_{R(AA^-),\ R(I-AA^-)}=P_{R(AA^-)}=P_{R(A)}=P_A$

2）同理 $A^-A=P_{R(A^-A)}$ 又因为

$R(A^-A)=N^{\perp}(A^-A)'=N^{\perp}(A^-A)=N^{\perp}(A)$
$=R(A')$

$\therefore A^-A=P_{R(A')}=P_{A'}$

定理5 设有 $\underset{n\times m}{A}$，那么

1）$rk(A)=m \Longleftrightarrow A^-A=I_m$ 任意$A^-\in A\{1\}$。

2）$rk(A)=n \Longleftrightarrow AA^-=I_n$ 任意$A^-\in\{1\}$。

证：先证必要性：$m=rkI_m=rk(A^-A)=rk(A)$

再证充分性 由于I_m-A^-A是投影阵，从而为幂等阵，那么有$rk(I_m-A^-A)=tr(I_m-A^-A)=trI_m-tr(A^-A)$

$$=m-trA^-A=m-rk(A^-A)$$

$$=m-rk(A)=m-m=0$$

$\therefore\ I_m-A^-A=0$，即$A^-A=I_m$。

类似地可以证明2）。

这个定理给出了列满秩行满秩的充要条件。

定理6 设A^-是A的一个固定的减号逆，那么

1）$A\{1\}=\{A^-+Y-A^-AYAA^- \mid Y任意\}$。

2）$A\{1\}=\{A^-+W(I-AA^-)+(I-A^-A)Y \mid W, Y任意\}$

证：1） 先令 $M=\{A^-+Y-A^-AYAA^- \mid Y 任意\}$

设任意 $A^-+Y-A^-AYAA^-\in M$，因为

$A(A^-+Y-A^-AYAA^-)A=A$

$\therefore\ A^-+Y-A^-AYAA^-\in A\{1\}$

即 $M\in A\{1\}$。反之，取任意$X\in A\{1\}$，令$W=X-A^-$，那么

$$A^- AWAA^- = A^- A(X - A^-)AA^- = A^-(AXA)A^- - A^-(AA^-A)A^- = A^-AA^- - A^-AA^- = 0$$

$\therefore \quad X = A^- + W = A^- + W - A^-AWAA^- \in M$

从而 $A\{1\} \subseteq M$。

类似地可以证明2）。

这个定理告诉我们，只要求出一个A^-，那么$A\{1\}$的全体可以用公式表达出来。

Ⅱ. 加号逆

前面所提到过的，A的Moore－Penrose逆叫做A的加号逆，记做A^+。

定义： 设有$\underset{n\times m}{A}$，如果存在$\underset{m\times n}{X}$，使得

1） $AXA = A$

2） $XAX = X$

3） $(AX)' = AX$

4） $(XA)' = XA$

则称X为A的一个加号逆，或Moore－Penrose逆，记做 $X = A^+$ 。

由定义可知，如果A^+存在，它满足Moore－Penrose方程的1）——4），再由减号逆定义$A^+ \in A\{1\}$。由3），4）知 AA^+与A^+A都是对称阵。

例1 1） 设 $\underset{n\times m}{O}$，则 $\underset{n\times m}{O^+} = 0$。

2） 设 $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是n阶方阵，则$A^+ = A$

3）设 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，则 $A^+=$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1^+ & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^+\end{pmatrix}。$$

其中 $\lambda_i^+=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_i} & 当\ \lambda_i\neq 0\ 时\\ 0 & 当\ \lambda_i=0\ 时\end{cases}$.

证：只证明3），那么1）、2）都是3）的推论。

令 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_s\neq 0$，$\lambda_{s+1}=\cdots=\lambda_n=0$

$$设\ B=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s^{-1} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$$

容易验证 B满足 $Moone-Penrose$方程1）—4）。从而 $A^+=B$。

定理7 （存在唯一性）设 $\underset{n\times m}{A}$，则A^+存在且唯一。

证 先证存在性，

首先 当 $A=0$时，由例1）得证。

其次 当 $A\neq 0$时，设$rk(A)=r>0$，那么，由A的

满秩分解，有 $A=\underset{n\times r}{P}\ \underset{r\times m}{Q'}$，$rk(P)=rk(Q')=r$。

令 $X=Q(Q'Q)^{-1}(P'P)^{-1}P$

容易验证 X 满足Moore－Penrose方程1）—4）。

先证 X 是存在的，由于P、Q存在，又由

$rk(Q'Q)=rk(Q')=r$，$rk(P'P)=rkP=r$

所以$(Q'Q)^{-1}$和$(P'P)^{-1}$都存在，于是X存在。又因为：

1）$AXA=PQ'(Q(Q'Q)^{-1}(P'P)^{-1}P')PQ'$

$=PQ'=A$

2）$XAX=(Q(Q'Q)^{-1}(P'P)^{-1}P')PQ'(Q(Q'Q)^{-1}(P'P)^{-1}P')$

$=Q(Q'Q)^{-1}(P'P)^{-1}P'=X$

3）$AX=PQ'(Q(Q'Q)^{-1}(P'P)^{-1}P')$

$=P(P'P)^{-1}P'$

等式右端是对称阵，从而AX也是对称阵，

即 $(AX)'=AX$

4）类似地可证 $(XA)'=XA$。

这样$X=A^+$，证明了A^+的存在性。

再证唯一性，设X_1，X_2是A的任意两个加号逆。事实上

$X_1=X_1AX_1$

$=X_1(AX_1)'=X_1X_1'A'$

$=X_1X_1'(AX_2A)'$

$=X_1X_1'A'X_2'A'$

$=X_1(AX_1)'(AX_2)'$

$=X_1(AX_1)(AX_2)$

$$
\begin{aligned}
&= X_1AX_2 \\
&= (X_1A)'X_2 \\
&= A'X_1'X_2 \\
&= (AX_2A)'X_1'X_2 \\
&= A'X_2'A'X_1'X_2 \\
&= (X_2A)'(X_1A)'X_2 \\
&= X_2AX_1AX_2 \\
&= X_2AX_2 \\
&= X_2
\end{aligned}
$$

推论 3　当A^{-1}存在时，$A^{+}=A^{-}=A^{-1}$。

就是说，当$|A|\neq 0$时，这三种逆是统一的，而且是唯一的。当A^{-1}不存在时，A^{+}总存在且唯一，A^{-}存在但不唯一。

主要性质

由于$A^{+}\in A\{1\}$，即A^{+}是A^{-}之一，因此A^{-}的性质，A^{+}均具有，这里只介绍A^{+}的特有性质。

定理 8　1）$(A^{+})^{+}=A$，2）$(A')^{+}=(A^{+})'$。

证明　1）在 *Moore-Penrose* 方程中，A与X的地位是对称的，即A与A^{+}是对称的，A^{+}可看做A的加号逆，A也可看做A^{+}的加号逆。于是

$$(A^{+})^{+}=A\quad。$$

2）令　$X=(A^{+})'$

$$A'XA'=A'(A^{+})'A'=(AA^{+}A)'=A'$$

$$XA'X=(A^{+})'A'(A^{+})'=(A^{+}AA^{+})'=(A^{+})'=X$$

$$
\begin{aligned}
(A'X)'&=\{A'(A^{+})'\}'=A^{+}A=(A^{+}A)' \\
&=A'(A^{+})'=A'X
\end{aligned}
$$

类似地 $(XA')'=XA'$

定理9 $A^+=(A'A)^+A'=A'(AA')^+$

证明 令 $X=(A'A)^+A'$

$$AXA=A(A'A)^+A'A=A(A'A)^-A'A=A$$

$$XAX=[(A'A)^+A']A[(A'A)^+A']$$
$$=(A'A)^+A'=X$$

$$(AX)'=\{A(A'A)^+A'\}'=\{A(A'A)^-A'\}$$
$$=(P_A)'=P_A=A(A'A)^-A'=AX$$

$$(XA)'=\{(A'A)^+A'A\}'=(A'A)^+A'A$$
$$=XA$$

类似可证 $A^+=A'(AA')^+$。

推论4 $AA^+=AA'(AA')^+=P_A$

证明 $AA^+=A\{A'(AA')^+\}=(AA')(AA')^+$

又因为 $AA^+=AA^-=P_A$

推论5 $A^+A=A'(AA')^+A=P_A'$

证明 $A^+A=\{A'(AA')^+\}A=A'(AA')^-A=P_A'$

推论6 $rk(A^+)=rk(A)$

证明 $\because$ $A^+=A'(AA')^+$

$\therefore$ $R(A^+)\subseteq R(A')$ 于是

$$rk(A^+)=dimR(A^+)\leq dimR(A')$$
$$=rk(A')$$

又因为：$rk(A^+)=rk(A^-)\geq rk(A)=rk(A')$

$\therefore rk(A^+)=rk(A')=rk(A)$

由此，可以直接得出

推论7 $R(A^+)=R(A')$。

定理10 $(A'A)^+=A^+(A')^+=A^+(A')^+$

证明 $(A'A)^+ = (A'A)^+A'A(A'A)^+ = A^+(A(A'A)^+)$

$= A^+(A')^+$

A_+的求法

定理11 设有$\underset{n\times m}{A}$，那么

1） $R(A) = R(AA^+) = R(AA')$

2） $R(A^+) = R(A') = R(A^+A) = R(A'A)$

3） $R(I - AA^+) = N(AA^+) = N(A')$

$= N(A^+) = R^{\perp}(A)$

4） $R(I - A^+A) = N(A^+A) = N(A)$

$= R^{\perp}(A')$

证：1） 显然$R(A) = R(AA')$

首先 $R(AA^+) \subseteq R(A)$ 又由于

$rk(AA^+) = rk(A)$

$\therefore R(AA^+) = R(A)$

2） 类似地可以证明

$R(A) = R(A^+A) = R(A'A)$.

又因为 $R(A^+A) \subseteq R(A^+)$ 而且

$rk(A^+A) = rk(A) = rk(A^+)$

$\therefore R(A^+A) = R(A^+)$

3） $R(I - AA^+) = N(AA^+)$ 又由于

$N(A^+) \subseteq N(AA^+)$

$rk(A^+) = rk(AA^+)$

$\therefore N(AA^+) = N(A^+)$

又因为： $A^+ = (A'A)^+A'$

$\therefore N(A') \subseteq N(A^+)$

$rk(A')=rk(A^+)\quad \therefore N(A')=N(A^+)$

$N(A')=R^{\perp}(A)$

4）类似于3）可以证得。

例3 已知

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&-2\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix},\quad 求A^+$$

解 由于$R(A')$由下面四个向量生成，

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

而 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ 构成$R(A')$的一组基。

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\\1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\\-3\end{pmatrix}$$

因为 $A^+A=P_A'$ 而

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R(A')$$

所以

$$A^{+}A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = P_{A'}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ 即

$$A^{+}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

同理：

$$A^{+}A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{+}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

此外，解方程组 $A'X=0$ 得

$$X = k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

那么

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $N(A')$ 的一组基，由定理 6

知 $N(A') = N(A^+)$ 所以

$$A^+ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^+ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

从而

$$A^+ \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

于是得到

$$
A^{+}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} 。
$$

2．正定矩阵的推广

1970年 *Johnson*给出了：

定义 1 设$A\in R_{n\times n}$，若对任何的$0\neq X=(x_1\cdots x_n)^T \in R_{n\times 1}$都有 $X^TAX>0$，则称A为正定矩阵。

这里记做$A\in P_1$。

*Fiedler*和*Ptak*综合了他们多年的研究，证明了如下的命题：

设 $A\in R_{n\times n}$，则下述各款是相互等价的：

1） A的一切主子式全为正。

2） 对每一个$0\neq X(x_1\cdots x_n)^T\in R_{n\times 1}$，取$Y=AX=(y_1\cdots y_n)^T$，则必有$k$，（$1\leq k\leq n$），使$x_k y_k>0$。

3） 对每一个$0\neq X\in R_{n\times 1}$都有正对角矩阵$D_x>0$，使$X^T D_x AX>0$

4） 对每一个$0\neq X\in R_{n\times 1}$，都有非负对角矩阵$H_x\geq 0$，使$X^T H_x AX>0$。

5） A的每一个主子矩阵之实特征根都为正。

1984年，南京大学佟文廷，给出了概括上述内容的更广义的定义，同时给出这些矩阵的等价描述以及它们的包含关系，得出了更丰富的结果。还把自己的定义与有关结果推广到复数矩阵，概括了$Hermite$矩阵的推广。

定义 2 设$A\in R_{n\times n}$若对任何$0\neq X(x_1\cdots x_n)^T\in R_{n\times 1}$都有正对角矩阵 $D=D_x>0$，使$X^T DAX>0$，则称A为广义正定矩阵。记为$A\in P_{\tilde{D}}$。若$D=D_x$与X无关，则记为$A\in P_D$。

下面给出广义正定矩阵的等价描述。

定理 1 设 $A\in R_{n\times n}$，则前述命题中的1—5款与下述各款互为等价。

6） 对每一个$0 \neq X \in \underset{n \times 1}{R}$，都有正对角矩阵$D_x > 0$使$X^T A^T D_x X > 0$。

7） 对每一个$0 \neq X \in \underset{n \times 1}{R}$，都有非负对角矩阵$H_x \geq 0$，使$X^T A^T H_x X > 0$。

8） $A^T \in P_{\tilde{D}}$。

9） 对任何n阶正对角矩阵D_1与D_2都有$D_1 A D_2 \in P_{\tilde{D}}$

因此P_D对以任何正数乘矩阵之行或列的这种初等变换都是不变的。

10） 设A_1为A的任一个k阶主子矩阵，则对任一个$0 \neq X \in \underset{n \times 1}{R}$ 都有正对角矩阵$D_x > 0$，使得

$X^T D_x A_1 X > 0$（为简便计，仍记为$A_1 \in P_{\tilde{D}}$）。

证：$(X^T D_x A X)^T = X^T A^T D\ X$，由前述知6）与1—5项互为等价。同理知1）—7）相互等价。由于A^T与A相应主子式的值对应相等。因此8）与1）等阶。又9）中的D_1，D_2，$D_1 A D_2$之各主子式分别与A中之相应主子式同号，因此9）与1）等价。由1）与3）等价知1）与10）等价。

定理2 设$A \in \underset{n \times m}{R}$，$D$为$n$阶正对角矩阵，则下述各款互为等价。

1） $A \in P_D$

2） 对任一个n阶正对角矩阵$D_1 > 0$，

$D_1A\in P_{DD_1^{-1}}$。

3） $A^TD\in P_1$

4） $DA\in P_1$

5） $D^{-1}A^T\in P_1$

6） $AD^{-1}\in P_1$

7） $A^T\in P_{D^{-1}}$

8） 对任一个n阶正对角矩阵$D_2>0$，$AD_2\in P_{D_2D}$

9） 对任意的n阶正对角矩阵$D_1>0$，$D_2>0$，都有$D_1AD_2\in P_{D_2DD_1^{-1}}$

证：由$X^TDAX=X^TDD_1^{-1}D_1X$知1）$\Longleftrightarrow$2）。

由$(X^TDAX)^T=X^TA^TDX$知1）$\Longleftrightarrow$3）。

由定义1与定义2知1）$\Longleftrightarrow$4）。

因为$X^TA^TDX=X^TDD^{-1}A^TDX$

$$=(DX)^TD^{-1}A^T(DX)$$

而对任何的$0\neq y\in R_{n\times 1}$都有$0\neq X\in R_{n\times 1}$使$y=DX$，反之亦然。因此3）$\Longleftrightarrow$5）。

由$(X^TD^{-1}A^TX)^T=X^TAD^{-1}X=X^TD^{-1}A^TX$知5）$\Longleftrightarrow$6）$\Longleftrightarrow$7）。

由 $X^TD_2DAD_2X=(D_2X)^TDA(D_2X)$与3）$\Longleftrightarrow$5）同理可证得1）$\Longleftrightarrow$8）。

由$X^TD_2DD_1^{-1}(D_1AD_2)X=(D_2X)^TDA(D_2X)$与3）$\Longleftrightarrow$5）同理可证得1）$\Longleftrightarrow$9）

定理3 设$A\in R_{n\times n}$，则前述1）—5）与定理2中的6）—9）与下项互为等价。

10） A的每一主子矩阵之特征值实部都为正。

证明　1）—9）各项的等价性已证。实际上 1）$\Longrightarrow$10，10$\Longrightarrow$5）是显然的，而5）$\Longleftrightarrow$1），因此 10$\Longleftrightarrow$1）。

实对称正定矩阵的三角分解定理也可以推广到广义正定矩阵。

实广义正定矩阵的概念与相应结果也可以再向复矩阵推广。

1988年，河南周口师专夏长富对矩阵的正定性做了进一步的推广。

定义3　设$A\in R_{n\times n}$若对任何$0\neq X=(x_1\cdots x_n)^T\in R_{n\times 1}$都存在$S=S_X\in S^+$，使得$X^TSAX>0$，则称$A$为广义正定矩阵。记做$A\in P_{\widetilde{S^+}}$，当$S=S_X$与$X$无关时，记做$A\in P_S$。

由定义2和定义3，显然有$P_{\widetilde{D^+}}\subseteq P_{\widetilde{S^+}}$，和$P_S\subseteq P_{\widetilde{S^+}}$。

定理3　设$A\in R_{n\times n}$，则 $A\in P_S$的充要条件是，存在$S\in S^+$使 $SA+A^TS\in S^+$。

证明　先证必要性，设$A\in P_S$，由定义3知存在$S\in S^+$，使对任何$0\neq X=(x_1\cdots x_n)^T\in R_{n\times 1}$都有$X^TSAX>0$

因而　$X^T(SA+A^TS)X=2X^TSAX\cdots(1)$

所以对任何$0\neq X\in R_{n\times 1}$，都有$X^T(SA+A^TS)X>0$，

因为 $(SA+A^TS)^T=SA+A^TS$，即知 $SA+A^TS\in S^+$。

再证充分性 设存在$S\in S^+$，使$SA+A^TS\in S^+$由（1）可得，对任何$0\neq X=(x_1\cdots x_n)^T\in \underset{n\times 1}{R}$都有：

$$X^TSAX=\frac{1}{2}X^T(SA+A^TS)X>0$$

所以 $A\in P_S$。

对任意给定的$S\in S^+$ 记

$$P_S=\left\{A\in \underset{n\times n}{R}\ \middle|\ \forall\ 0\neq X\in \underset{n\times 1}{R},\ X^TSAX>0\right\}$$

定理4 设$A\in \underset{n\times n}{R}$，则下述各款相互等价。

1） $A\in P_S$　　2）$S_1A\in P_{SS_1^{-1}}$其中S_1与S可交换且$S_1\in S^+$。

3） $SA\in P_1$　　4） $A^TS\in P_1$

5） $S^{-1}A^T\in P_1$　　6） $AS^{-1}\in P_1$

7） $A^T\in P_{S^{-1}}$　　8） $AS_2\in P_{S_2S}$其中$S_2\in S$且S_2与S可交换。

9） $S_1AS_2\in P_{S_2SS_1^{-1}}$ 其中S_1，S_2，S两两可交换，且S_1，$S_2\in S$。

这里，对定理中的符号$P_{SS_1^{-1}}$，P_{S_2S}及$P_{S_2SS_1^{-1}}$的意义作以下两点说明。

a） 对于$A,B\in \underset{n\times n}{R}$若$B$可逆且$A$与$B$可交换。则$A$与$B^{-1}$可交换。

b） 若$A,B\in S^+$，且A与B可变换，则 $AB\in S^+$。

这样，因S_1，S_2，S两两可交换，所以S_1^{-1}，S_2，S两两可交换，又因为$S_1\in S^+$，所以$S_1^{-1}\in S^+$，从而可知SS_1^{-1}，S_2S，$S_2SS_1^{-1}\in S^+$。故符号$P_{SS^{-1}}$，P_{S_2S}，

$P_{S_2SS_1^{-1}}$有意义。

证：先假设1）成立，证明1）—7）的等价性。因为对任何$0\neq X=(x_1\cdots x_n)^T\in \underset{n\times 1}{R}$，有$X^TSAX>0$，所以 $X^T(SS_1^{-1})(S_1A)X=X^TSA>0$，即2）成立。 假设2）成立，取$S_1=S$ 则有$SA\in P_1$，即3）成立。 假设3）成立，因为对任何$0\neq X=(x_1\cdots x_n)^T\in\underset{n\times 1}{R}$都有$X^TSAX>0$，所以 X^TA^TSA

$=(X^TSAX)^T>0$。即4）成立。

假设4）成立，因为

$$X^TA^TSX=X^TSS^{-1}A^TSX=(SX)^TS^{-1}A^T(SX)$$
$$=Y^TS^{-1}A^TY \quad 其中\ Y=SX，而对任何$$

$0\neq Y\in\underset{n\times 1}{R}$，都有$0\neq X\in\underset{n\times 1}{R}$，于是 $Y^TS^{-1}A^TY$

$=X^TA^TSX>0$，所以5）成立。

假设5）成立，由$X^TAS^{-1}X=X^TS^{-1}A^TX$，即知6）成立。

假设6）成立，由$X^TS^{-1}A^TX=X^TAS^{-1}X$，知7）成立。

假设7）成立，因为

$$X^TSAX=(SX)^TS^{-1}A^T)SX)=Y^TS^{-1}AY$$

其中$Y=AX$，而对任何$0\neq X\in R_{n\times 1}$，都有$0\neq Y\in R_{n\times 1}$，于是 $X^TSAX=Y^TS^{-1}A^TY>0$，所以1）成立，

最后证明1）与8）等价，1）与9）等价。

假设1）成立，因为

$X^T(S_2S)(AS_2)X=(S_2X)^TSA(S_2X)=Y^TSAY\cdots(2)$具中 $Y=S_2X$。而对任何$0\neq X\in R_{n\times 1}$，都有$0\neq Y\in R_{n\times 1}$，所以 $X^T(S_2S)(AS_2)X=Y^TSAY>0$。所以8）成立。

假设1）成立，因为：

$X^T(S_2SS_1^{-1})(S_1AS_2)X=(S_2X)^TSA(S_2X)=Y^TSAY$ 其中$Y=S_2X$，而对任何$0\neq X\in R_{n\times 1}$，都有$0\neq Y\in R_{n\times 1}$，反之亦然，从而9）成立。由此知，若9）成立，1）也成立。这就证明了1）—9）是等价的。

现在，对广义正定矩阵的研究还在继续进行，有兴趣的读者可参看有关文献。

十六、短论集锦

1．整系数多项式的哥德巴赫定理

哥德巴赫猜想断定每一个比4大的偶数是两个素数的和。用Z表示整数环，多项式环$Z[x]$与Z一样是一个唯一分解整环，其中不可约多项式相当于整数中的素数。下面证明多项式环$Z[x]$中与哥德巴赫猜想类似的定理。

定理1　在$Z[x]$中每一个次数$n\geq 1$的多项式M可以写成两个不可约n次多项式A与B的和，即：$M=A+B$。

首先证明以下引理。

引理　若p和q是不同的奇素数，则存在整数c和d，使得$pc+qd=1$，并且$p\nmid c$，$q\nmid d$。

证明　由初等数论可知，存在整数c_0、d_0使得$pc_0+qd_0=1$。若$p\nmid c_0$，$q\nmid d_0$则c_0、d_0已适合要求。若$p\mid c_0$或$q\mid d_0$，不妨设$p\mid c_0$。令

$c_r=c_0+qr$，$d_r=d_0-pr$　显然对任何整数r有

$$pc_r+qd_r=p(c_0+qr)+q(d_0-pr)=pc_0+qd_0$$

$=1$。现在，c_1和c_2都不能被p整除，否则c_1-c_0或c_2-c_0可被p整除，从而可推出$p\mid q$，这与已知条件矛盾！这时d_1和d_2之一不能被q整除，否则$d_1-d_2=p$能被q整除，又与已知矛盾！因此，数对(c_1, d_1)和(c_2, d_2)之一适合要求。得证。

下证定理1　设整数系数多项式

$$M=m_0x^n+m_1x^{n-1}+\cdots+m_n$$

的次数$n\geq k1$。选择不同的奇素数p和q，使得它们即不能整除m_0也不能整除m_n，再选择a_0'及b_0'使$qa_0'+pb_0'=m_0$，令$a_0=qa_0'$，$b_0=pb_0'$。于是

$$m_0=a_0+b_0,\quad p\nmid a_0,\quad q\nmid b_0 \tag{1}$$

对于每一个整数i，$0<i<n$，选择a_i'和b_i'，使得$pa_i'+pb_i'=m_i$，令$a_i=pa_i'$，$b_i=qb_i'$。于是对于$0<i<n$有

$$m_i=a_i+b_i,\quad p\mid a_i,\quad q\mid b_i \tag{2}$$

按引理，选择a_n'和b_n'，使$pa_n'+qb_n'=m_n$并且$p\nmid a_n'$，$q\nmid b_n'$，令$a_n=pa_n'$，$b_n=qb_n'$，于是

$$m_n=a_n+b_n,\quad p\mid a_n,\quad p^2\nmid a_n,\quad q\mid b_n,\quad q^2\nmid b_n \tag{3}$$

作多项式A和B：

$$A=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

$$B=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n,$$

于是据(1)，(2)，(3)及$Eisenstein$判别法可知A，B为$Z[x]$中不可约多项式且$M=A+B$。

定理1是下面更一般定理的特殊情形。

定理2　设R是含有无穷多元素的主理想整环，则对$R[x]$中任何次数$n\geq1$的多项式M，存在次数为n的不可约多项式A和B使$M=A+B$。

2. 多元多项式互素的充要条件

F为数域，$f(x)$，$g(x)\in F[x]$互素的充要条件是存在$u(x)$，$v(x)\in F[x]$，使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1。$$

在一元多项式的理论中，它起着重要作用。这里先给出两个二元多项式互素的定义，再把上述结果推广到二元多项式。

定义 $f(x, y)$，$g(x, y) \in F[x, y]$，如果除零次多项式外，它们没有次数大于零的公因式，则称$f(x, y)$与$g(x, y)$是互素的。

令$F(x)$是整环$F[x]$的分式域，即

$$F(x)=\left\{\frac{a(x)}{b(x)} \middle| a(x), b(x) \in F[x], b(x) \neq 0\right\}。$$

则$f(x, y)$，$g(x, y)$可看成是域$F(x)$上的关于y的多项式，即$f(x, y)$，$g(x, y) \in F(x)[y]$。

若$f(x, y)$，$g(x, y)$在$F[x, y]$中互素，则在$F(x)[y]$中也互素。因此存在$S(y)$，$T(y) \in F(x)[y]$，使得

$$S(y)f(x, y)+T(y)g(x, y)=\frac{h_1(x)}{h_2(x)} \quad (1)$$

不妨令

$$S(y)=\frac{a_0(x)}{b_0(x)}+\frac{a_1(x)}{b_1(x)}y+\cdots+\frac{a_k(x)}{b_k(x)}y^k,$$

$$T(y)=\frac{c_0(x)}{d_0(x)}+\frac{c_1(x)}{d_1(x)}y+\cdots+\frac{c_t(x)}{d_t(x)}y^t,$$

令$h_2(x)$，$b_i(x)$，$d_j(x)$在$F[x]$中的最小公倍式是$\varphi_1(x)$，$i=0, 1, \cdots, k$；$j=0, 1, \cdots, t$。用$\varphi_1(x)$乘(1)式两边得

$$u_1(x, y) \cdot f(x, y)+v_1(x, y) \cdot g(x, y)$$
$$=\varphi(x) \quad (2)$$

其中$\varphi(x)\neq 0$。

采用类似方法可得

$$u_2(x, y)\cdot f(x, y)+v_2(x, y)\cdot g(x, y)=\psi(y) \tag{3}$$

其中$\psi(y)\neq 0$。

反之,若(2),(3)两式成立,设$d(x,y)$是$f(x,y)$与$g(x, y)$的任意公因式,则$d(x, y)|\varphi(x)$,$d(x, y)|\psi(y)$,因此$d(x, y)$是非零常数,所以$f(x, y)$与$g(x, y)$互素。

因此得

定理1 $f(x, y)$,$g(x, y)\in F[x, y]$。它们互素的充要条件是存在$u_1(x, y)$,$v_1(x, y)$及$u_2(x, y)$、$v_2(x, y)\in F[x, y]$,使得

$$f(x, y)\cdot u_1(x, y)+g(x, y)\cdot v_1(x, y)=\varphi(x),$$

$$f(x, y)\cdot u_2(x, y)+g(x, y)\cdot v_2(x, y)=\psi(y)。$$

其中$\varphi(x)$,$\psi(y)$都是非零多项式。

因为1可以看成x的零次多项式,也可看成y的零次多项式,所以一元多项式互素的充要条件是定理1的特例。

为下面叙述方便,如将$f(x,y)$看成x的一元多项式,即$f(x, y)\in F(y)[x]$,$f(x,y)$对x的次数记作$\partial^0_x(f(x, y))$,利用定理1可将一元多项式互素的性质平行地推到二元多项式。

性质1 若$f(x, y)$,$g(x, y)$都与$h(x, y)$互素,那么$f(x, y)\cdot g(x, y)$与$h(x, y)$互素。

证明 为叙述方便将$f(x, y)$简记为f。

因为f与h互素,则存在v_1,u_1,v_2,$u_2\in F[x, y]$

使得

$$fu_1+hv_1=\varphi_1(x),\ \varphi_1(x)\neq 0,$$

$$fu_2+hv_2=\psi_1(y),\ \psi_1(y)\neq 0,$$

因为g与h互素，则存在u_1'、v_1'、u_2'、$v_2'\in F[x, y]$使得

$$gu_1'+hv_1'=\varphi_2(x),\ \varphi_2(x)\neq 0,$$

$$gu_2'+hv_2'=\psi_2(y),\ \psi_2(y)\neq 0,$$

所以$(fu_1+hv_1)(gu_1'+hv_1')=\varphi_1(x)\varphi_2(x)$，$(fu_2+gv_2)(gu_2'+hv_2')=\psi_1(y)\psi_2(y)$，即

$$(fg)(u_1u_1')+h(fu_1v_1'+gv_1u_1'+hv_1v_1')=\varphi_1(x)\varphi_2(x),$$

$$(fg)(u_2u_2')+h(fu_2v_2'+gv_2u_2'+hv_2v_2')=\psi_1(y)\psi_2(y),$$

且$\varphi_1(x)\varphi_2(x)\neq 0$，$\psi_1(y)\psi_2(y)\neq 0$。由定理1知$fg$与$h$互素。

性质2 如果$h(x, y)\mid f(x, y)g(x, y)$，且$h(x, y)$与$f(x, y)$互素，则$h(x, y)\mid g(x, y)$。

证明 因f与h互素，则存在u_1，v_1，u_2，$v_2\in F[x,y]$使得

$$hu_1+fv_1=\varphi(x),\ hu_2+fu_2=\psi(y),\ \varphi(x)\neq 0,\ \psi(y)\neq 0.$$

所以$hgu_1+fgv_1=\varphi(x)g$，$hgu_2+fgv_2=\psi(y)g$。因$h\mid fg$，所以$h\mid\varphi(x)g$，$h\mid\psi(y)g$。假定$h\nmid g$，将h，g看成x的多项式（如果h不含x，显然$h\mid g$）。则

$$g=h\cdot q+r，其中\partial^0_x[r(x, y)]<\partial^0_x[h(x, y)],$$

两边同乘以$\psi(y)$得

$$\psi(y)g=\psi(y)hg+\psi(y)r.$$

因$h\mid\psi(y)g$，得$h\mid\psi(y)r$，且$\psi(y)\neq 0$。与$\partial_x^0[\psi(y)\cdot r(x,y)]=\partial_x^0[r(x,y)]<\partial_x^0[h(x,y)]$矛盾！所以$h\mid g$。

性质3　如果$g(x,y)\mid f(x,y)$，$h(x,y)\mid f(x,y)$，$g(x,y)$与$h(x,y)$互素，则$g(x,y)\cdot h(x,y)\mid f(x,y)$。

证明留给读者。

对一般的两个n元多项式，也有类似定理1的结论。

定理2　$f(x_1,\cdots,x_n)$，$g(x_1,\cdots,x_n)\in F[x_1,\cdots,x_n]$互素的充要条件是存在$u_i(x_1,\cdots,x_n)$，$v_i(x_1,\cdots,x_n)\in F[x_1,\cdots,x_n]$，$i=1,\cdots,n$使得

$$fu_1+gv_1=\varphi_1(x_2,\cdots,x_n),$$

$$fu_2+gv_2=\varphi_2(x_1,x_3,\cdots,x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$fu_n+gv_n=\varphi_n(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),$$

且$\varphi_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$。

3．计算结式的一种方法

结式在代数中有着许多重要应用，如利用结式能有效地解决两个一元多项式以及两个二元多项式的公共零点问题。关于结式的计算，一般有两种方法，其一是行列式法，其二是公式法。下面给出另一种方法，只须对所给两个一元多项式进行有限次带余除法即可。

下述仅限于在复数域上进行讨论。

设

$$f(x)=a_0x+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,\qquad n>0 \qquad (1)$$

$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m,\qquad m>0 \qquad (2)$$

均为复数域上两个一元多项式，称$m+n$阶行列式

$$\left(\begin{array}{cccccccc}
a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & & 0\\
 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & & \\
0 & & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n\\
b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & & 0\\
 & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\
0 & & & b_0 & & b_1 & \cdots & b_m
\end{array}\right)
\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m\text{行}\\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{行}\end{array} \qquad (3)$$

为$f(x)$，$g(x)$的结式，记作$R(f, g)$。

不难证明下列诸式成立。

$$R(f, g)=(-1)^{nm}R(g, f)。\qquad (4)$$

若$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，又α_1，α_2，$\cdots$，α_n与β_1，β_2，$\cdots$，β_m分别为$f(x)$与$g(x)$的全部（复）根，则

$$R(f, g)=a_0{}^m\prod_{i=1}^{n}g(\alpha_i)$$

$$=(-1)^{nm}b_0{}^n\prod_{j=1}^{m}f(\beta_j)。\qquad (5)$$

若$g(x)$为任一次数大于零的多项式，r为任一复数，规定

$$R(g(x), r)=R(r, g(x))=r^m \qquad (6)$$

其中$\partial^0(g(x))=m$。

关于(6)的合理性可作如下解释：因为$g(x)$是m($m>0$)次多项式，若$r\neq 0$，则r是零次多项式，故$g(x)$与r的结式是$m+0$阶行列式，而$g(x)$的系数不应在行列式中出现，即(m阶行列式)

$$R(g(x),\ r)=\begin{vmatrix} r & & & \\ & r & & \\ & & \ddots & \\ & & & r \end{vmatrix}=r^m.$$

特别地规定$R(g(x),\ 0)=R(0,\ g(x))=0$。

命题1　若$f(x)$，$g(x)$　(见(1)，(2))满足

$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，$r(x)\neq 0$。

则$R(f,\ g)=(-1)^{nm-nl}b_0^{n-l}R(r,\ g)$，其中$\partial^0(r(x))=l$

证明　若$l>0$，据公式(5)有

$$R(f,\ g)=R(g(x)q(x)+r(x),\ g(x))$$

$$=(-1)^{nm}b_0^n\prod_{j=1}^{m}[g(\beta_j)q(\beta_j)+r(\beta_j)]$$

$$=(-1)^{nm}b_0^n\cdot\prod_{j=1}^{m}r(\beta_j)$$

$$=(-1)^{nm-ml}b_0^{n-l}\cdot(-1)^{ml}b_0^l\prod_{j=1}^{m}r(\beta_j)$$

$$=(-1)^{nm-nl}b_0^{n-l}R(r,\ g)。$$

若$l=0$，即$r(x)$为某一非零数r，易知

$R(f, g) = (-1)^{nm} b_0{}^n r^m = (-1)^{nm} b_0{}^n R(r, g)$，从而命题得证。

类似地，由公式(4)及命题1不难证明

命题2 若$f(x)$，$g(x)$（见(1)，(2)）满足

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x),\quad r(x) \neq 0$$

则$R(f, g) = a_0{}^{m-l} R(f, r)$，其中$\partial^0(r(x)) = l$

命题3 若$f(x)$，$g(x)$ （见〔1〕，〔2〕）满足

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x),$$

$$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x),$$

$$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x),$$

……………………………………

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x),$$

$$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x) + r_{k+1}(x),$$

且$r_{k+1}(x) \neq 0$则

$$R(f, g) = (-1)^{\tau} b_0^{n-l_1} r_{10}^{m-l_2} r_{20}^{l_1-l_3} \cdots r_{k0}^{l_{k-1}-l_{k+1}} R(r_k, r_{k+1})$$

其中l_i与r_{i0}分别为$r_i(x)$（$i = 1, 2, \cdots, k+1$）的次数与首项系数，$\tau = nm + ml_1 + l_1 l_2 + \cdots + l_{k-1} l_k$

证明 先看k为奇数的情形，此时反复应用命题1、2可得

$$R(f, g) = (-1)^{nm-ml_1} b_0^{n-l_1} R(r_1, g),$$

$$R(r_1, g) = r_{10}^{m-l_2} R(r_1, r_2),$$

$$R(r_1, r_2) = (-1)^{l_1 l_2 - l_2 l_3} r_{20}^{l_1-l_3} R(r_3, r_2)$$

……………………………………

$$R(r_{k-2},\ r_{k-1})=(-1)^{l_{k-2}l_{k-1}-l_{k-1}l_k}$$

$$r_{k-1}^{l_{k-2}-l_k}\ R(r_k,\ r_{k-1}),$$

$$R(r_k,\ r_{k-1})=r_0^{l_k-l_{k+1}}\ R(r_k,\ r_{k+1})。$$

将上边各式两端分别相乘得：

$$R(f,\ g)=(-1)^{nm-ml_1+l_1l_2-l_2l_3+\cdots}$$

$$^{+l_{k-2}l_{k-1}-l_{k-1}l_k}\ b_0^{n-l_1}\ r_{10}^{1-l_1}\ r_{10}^{m-l_2}\ 。$$

$$r_{20}^{l_1-l_3}\cdots\cdots r_{k0}^{l_{k-1}-l_{k+1}}R(r_k,r_{k+1})$$

为便于计算，不妨把整数的代数和

$$nm-ml_1+l_1l_2-l_2l_3+\cdots+l_{k-2}l_{k-1}-l_{k-1}l_k$$

改换成它们的和

$$nm+ml_1+l_1l_2+l_2l_3+\cdots l_{k-2k-1}+l_{k-1}l_k$$

这样做并不影响其奇偶性，故得如所证的公式。

若为k偶数，有：

$$R(f,\ g)=(-1)^{nm-ml_1}\ b_0^{-l_1}\ R(r_1,\ g)$$

$$R(r_1,\ g)=r_{10}^{m-l_2}\ R(r_1,\ r_2),$$

$$R(r_1,\ r_2)=(-1)^{l_1l_2-l_2l_3}\ k_{20}^{l_1-l_3}\ R(r_3,\ r_2),$$

……………………………………

$$R(r_{k-1},\ r_{k-2})=r_{k-1,0}^{l_{k-2}-l_k}\ R(r_{k-1},\ r_k),$$

$$R(r_{k-1},\ r_k)=(-1)^{l_{k-1}l_k-l_kl_{k+1}}\ r_{k0}^{l_{k-1}-l_{k+1}}$$

$$R(r_{k+1},\ r_k),$$

将上面诸式两边分别相乘并注意到

$$(-1)^{l_kl_{k+1}}\ R(r_{k+1},\ r_k)=R(r_k,\ r_{k+1})。$$

即可得要证的公式。

利用命题3，对$f(x)$、$g(x)$进行有限次带余除法即可求出f、g的结式。

读者可用上述方法，计算

$f(x)=2x^5-7x^3+4x^2+5x+3$，

$g(x)=x^3-3x+1$的结式（结果：$R(f,\ g)$
$=-424$）

（本文作者：大连大学师范学院数学系王炳安）

4．代数学基本定理的一个初等证明

所谓代数学基本定理是指：

定理 任何n（n＞0）次多项式在复数域中至少有一个根。

下述证明中所用预备知识不超出普通高等代数教程，先把这些知识概括为三个引理。

引理： 设$f(x)$是闭区间〔a，b〕上连续实函数，$f(a)f(b)<0$，则$f(x)$在〔a，b〕中必有一个零点。

实际上我们只用到下面两个推论

推论1 任一实数都有一个实的平方根。

推论2 任一奇数次实系数多项式都有一个实根。

引理2 设$f(x)=a_0x+a_1x^{n-1}+\cdots+an$为复系数多项式，$f^*(x)=\bar{a}_0x^n+\bar{a}_1x^{n-1}+\cdots+\bar{a}_n$，则$f(x)f^*(x)$为实系数多项式；若$a$为$f(x)$的根，则$a$为$f^*(x)$的根。

引理3 设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n(a_0\neq 0)$及$g(x)=b_0x^m+\cdots+b_m(b_0\neq 0)$为两个（实或复系数的）的多项式，则它们有非常数（实或复系数的）公因子的充要条件是它们的结式

$$R=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & 0 \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ 0 & & \ddots & & & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & 0 \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & & b_0 & b_1 & & \cdots & b_m \end{vmatrix} \quad (1)$$

等于0。

证 由多项式的唯一因子分解性（或辗转相除法）可知，f与g有非常数因子的充要条件是有非零多项式$p(x)=p_0x^{m-1}+\cdots+p_{m-1}$和$q(x)=q_0x^{n-1}+\cdots+q_{n-1}$使得

$$p(x)f(x)+q(x)g(x)=0 \quad (2)$$

这也就是

$$
\begin{array}{llll}
a_0 p_0 & + b_0 q_0 & = 0 & \\
a_1 p_0 + a_0 p_1 & + b_1 q_0 + b_1 q_1 & = 0 & \quad (3) \\
\hline
\quad a_n p_{m-1} + & \quad b_m q_{n-1} & = 0 &
\end{array}
$$

把(3)看作关于p_0，…，p_{m-1}，q_0，…，q_{n-1}的方程组，于是由线性代数可知，f与g有非常数公因子的充要条件是线性齐次方程组(3)有非零解，而这又等价于结式$R=0$。

定义 设$f(x)$为n次多项式，$n=2^m\cdot k$，k为奇数，则称m为多项式f的高度，记$m=h(f)$。

我们将对f的高度归纳，来证明任一复系数非常数多项式必有一复根。

命题1 令

$$
A_n=\begin{vmatrix}
C_{2n}^0 & C_{2n}^1 & \cdots\cdots & C_{2n}^{2n} & & & \\
 & C_{2n}^0 & \cdots\cdots\cdots & & C_{2n}^{2n} & & \\
 & & \ddots & \cdots\cdots & & \ddots & \\
 & & & C_{2n}^0 & & & C_{2n}^{2n} \\
C_{2n}^1 & \cdots\cdots\cdots & C_{2n}^{2n-1} & & & & \\
 & C_{2n}^1 & \cdots\cdots\cdots & C_{2n}^{2n-1} & & & \\
 & & \ddots & & \ddots & & \\
 & & & C_{2n}^1 & \cdots\cdots\cdots & C_{2n}^{2n-1} &
\end{vmatrix} \quad (4)
$$

则$A_n\neq 0$。

证　A_n就是多项式$a(x)=C_{2n}^0 x^n+C_{2n}^2 x^{n-1}+\cdots+C_{2n}^{2n}$ 和 $b(x)=C_{2n}^1 x^{n-1}+\cdots+C_{2n}^{2n-1}$ 的结式。由引理3，$A_n=0$意味着$a(x)$和$b(x)$有非零常数公因子$\varphi(x)$，于是$\varphi(x^2)$就是$a(x^2)+xb(x^2)=(x+1)^{2n}$的因子，这已经是矛盾了（由$\varphi(x^2)$也是$a(x^2)-xb(x^2)=(x-1)^{2n}$的因子可以看出更明显的矛盾）。

对于任一个$2n$次首1多项式，总可以把$f(x+a)$展开为：

$$f(x+a)=x^{2n}+f_1(a)x^{2n-1}+f_2(a)x^{2n-2}+\cdots+f_{2n}(a) \tag{5}$$

其中$f_i(a)$为a的多项式，它的首项系数就是$(x-a)^{2n}$展开式中$a^i x^{2n-i}$的系数，即C_{2n}^i。我们有：

命题2　行列式$A_f(x)$

$$=\begin{vmatrix}
1 & f_2(x) & f_4(x) & \cdots & f_{2n}(x) & & & \\
 & 1 & f_2(x) & f_4(x) & \cdots & f_{2n}(x) & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & 1 & f_2(x) & \cdots & f_{2n}(x) & \\
f_1(x) & f_3(x) & \cdots & f_{2n-1}(x) & & & & \\
 & f_1(x) & f_3(x) & \cdots & f_{2n-1}(x) & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & f_1(x) & \cdots & f_{2n-1}(x) & &
\end{vmatrix} \tag{6}$$

是x的$n(2n-1)$次多项式。

证　为方便把（6）式右边第k行l列的元素记为$a_{kl}(x)$。如果$a_{kl}(x)\neq 0$，则它的次数当$k\leq n-1$时为$2(l-k)$，当$k>n-1$时为$2(l+n-k)-1$，（6）式右边的拉普拉斯展开式的每个非零项形如

$$\pm a_{1i_1}(x)\,a_{2i_2}(x)\cdots a_{2n-1,i_{2n-1}}(x) \qquad (7)$$

其中$i_1, i_2\cdots, i_{2n-1}$为$1, 2, \cdots, 2n-1$的某个置换，因而$\sum_{k=1}^{2n-1} i_k=\sum_{k=1}^{2k-1} k$。　　于是项（7）的次数为

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2(i_k-k)+\sum_{k=n}^{2n-1}\left[2(i_k+n-k)-1\right]$$

$$=2\sum_{k=1}^{2n-1} i_k-2\sum_{k=1}^{2n-1} k+n(2n-1)=n(2n-1) \qquad (8)$$

既然每个形如（7）的非零项都是一个$n(2n-1)$次多项式，只须证$A_f(x)$中$x^{n(2n-1)}$的系数不为0就行了。这个系数就等于在（6）式右边用$f_i(x)$的首项系数代替$f_i(x)$所得的行列式，也就是命题1中的A_n。

命题3　设n为奇数，则$2n$次实系数多项式$f(x)$有一复根。

证　对n作归纳证明。$n=1$时由引理1推出。以下设$n>1$。

由命题2，$A_f(x)$是奇数次实系数多项式，故由引理1，它有一个实根a，由于$A_f(a)$就是多项式$\overline{a}(x)$

$=x^n+f_2(a)x^{n-1}+\cdots+f_{2n}(a)$和$\widetilde{b}(x)=f_1(a)x^{n-1}+\cdots+f_{2n-1}(a)$的结式，这就得出$\widetilde{a}(x)$和$\widetilde{b}(x)$有非常数公因子$\varphi(x)$，于是$\varphi(x^2)$就是$\widetilde{a}(x^2)+x\widetilde{b}(x^2)=f(x+a)$的非常数真因子，因而$f$可以分解为两个偶数次实系数多项式的积

$$f(x)=c(x)d(x) \tag{9}$$

$h(c)$、$h(d)$不能都大于1，否则$h(f)$就大于1了。因此不妨设$h(c)=1$．由归纳法假设，$c(x)$有一复根，它也是$f(x)$的根。

代数基本定理的证明：

奠基 由命题3和引理2可推出，任一奇数次复系数多项式必有一个复根。

归纳 设复系数多项式$f(x)$的高度不小于1，则由命题2，$h(A_f)=h(f)-1$，由归纳法假设即得$A_f(x)$有一个复根，于是和命题3完全类似地可知有复系数非常数多项式$c(x)$、$d(x)$，使分解式(9)成立。$h(c)$和$h(d)$不能都大于$h(f)$，不妨设$h(c)\le h(f)$．如果$h(c)<h(f)$，则由归纳法假设知$c(x)$有一个复根。否则，即$f(x)$有高度为$h(f)$的真因子，则在这样的真因子中必有次数最低的，设$\varphi(x)$就是一个（即$\varphi(x)$是$f(x)$的高度为$h(f)$的真因子中次数最低的之一）。前面对f的讨论同样适用于φ，即$\varphi(x)$也可以分解，但$\varphi(x)$不可能有高度为$h(f)$的真因子了，也就是说，$\varphi(x)$必有一复根。从而$f(x)$必有一复根。

定理得证。

5. 行列式性质的推广及其应用

如所周知，行列式具有下述性质

1° 将行列式的一行（列）元素乘以数a后加到另一行（或列）的相应元素上，行列式的值不变；

2° 用数a乘行列式的一行（或列）等于将行列式乘以数a；

3° 对换行列式中两行的位置，行列式反号。

现将上述性质予以推广，并举例说明其应用。

命题1 设方阵A可写成如下形式

$$A=\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ M_{31} & M_{32} & \cdots & M_{3n} \end{pmatrix},$$

其中，M_{11}，M_{12}，…，M_{1n}都是$m_1\times t$矩阵；M_{21}，M_{22}，…，M_{2n}是$m_2\times t$矩阵；M_{31}，M_{32}，…，M_{3n}均是$m_3\times t$矩阵；A_1，A_2，…，A_n；B_1，B_2，…，B_n都是$s\times t$矩阵。又C为任一s级矩阵。

$$D=\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ A_1+CB_1 & A_2+CB_2 & \cdots & A_n+CB_n \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ M_{31} & M_{32} & \cdots & M_{3n} \end{pmatrix},$$

则 $|A|=|D|$.

证明 ∵

$$\begin{pmatrix} E_{m1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_s & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & E_{m2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{m3} \end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ M_{31} & M_{32} & \cdots & M_{3n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ A_1+CB_1 & A_2+CB_2 & \cdots & A_n+CB_n \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ M_{31} & M_{32} & \cdots & M_{3n} \end{pmatrix},$$

这里$E_{m_1}, E_s, E_{m_2}, E_{m_3}$分别是$m_1, s, m_2, m_3$级的单位矩阵。

∴对上式两边取行列式，即得$|A|=|D|$。

命题 2 设方阵A可写成如下形式

$$A = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \end{pmatrix}$$

其中，M_{11}、M_{12}、…、M_{1n}都是$m_1 \times t$矩阵，M_{21}、M_{22}、…、M_{2n}都是$m_2 \times t$矩阵。A_1、A_2、…、A_n都是$s \times t$矩阵。又B是s级方阵，

$$C = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ BA_1 & BA_2 & \cdots & BA_n \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \end{pmatrix}.$$

则$|C|=|A||B|$。

证明 以E_1、E_2分别表示m_1、m_2级单位矩阵。

则 $C=\begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix}A。$$

于是

$$|C| = \begin{vmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{vmatrix} \cdot |A|$$

$$=|E_1|\cdot|B|\cdot|E_2|\cdot|A|=|B|\cdot|A|。$$

命题3 设A仍为命题1所设，

$$F=\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ M_{31} & M_{32} & \cdots & M_{3n} \end{pmatrix},$$

则 $|F| = \begin{cases} |A|, & 当 s 为偶数时, \\ -|A|, & 当 s 为奇数时。\end{cases}$

证明 A可由F中B_i与A_i（$i=1$，2，…，n）相应的两行对换而得到。而对换行列式的两行，行列式反号。故当s为偶数时，$|F|=|A|$；当s为奇数时，$|F|=-|A|$。

这三个命题的结果对列同样成立。

例1 设A，B都是n级方阵，求证

$|AB|=|A|\cdot|B|$。

证明 作$2n$级行列式

$$|C|=\begin{vmatrix} AB & A \\ 0 & E \end{vmatrix}.$$

据拉普拉斯展开定理有

$|C|=|AB|.|E|=|AB|$.

把命题1用于列的情形有

$$\begin{vmatrix} AB & A \\ 0 & E \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} AB-AB & A \\ 0-EB & E \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & A \\ -B & E \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{命题3}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} -B & E \\ 0 & A \end{vmatrix}(-1)^n=|-B|\ |A|(-1)^n$$

$=(-1)^{2n}|A|\cdot|B|=|A|\cdot|B|$.

故得$|AB|=|A|\cdot|B|$.

例2 设A，B，C，D均是$n\times n$矩阵，且$|A|\neq 0$，$AC=CA$。证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|.$$

证明 $\because |A| \neq 0$, $\therefore A^{-1}$存在。

由命题1，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}$$

$$= |A| \cdot |D-CA^{-1}B|$$

$$= |A(D-CA^{-1}B)|$$

$$= |AD-(CA)A^{-1}B| = |AD-CB|.$$

例3 设A，B都是n级矩阵，证明AB，BA的特征多项式相同。

证明 AB，BA的特征多项式分别是

$|\lambda E-AB|$， $|\lambda E-BA|$.

而

$$|\lambda E-AB| \xlongequal{\text{例2的结论}} \begin{vmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{命题3}} (-1)^n \begin{vmatrix} A & E \\ \lambda E & B \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{命题 3}}}\ (-1)^{2n}\begin{vmatrix} E & A \\ B & \lambda E \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{例2的结论}}}\ |\lambda E - BA|.$$

得证！

6."杨辉三角"中的行列式

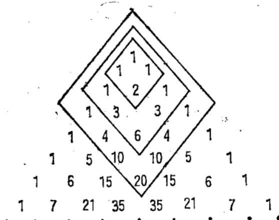
有如下一道行列式计算题

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix},$$

它的结果等于1．不难知道，这个行列式左上角的三阶、二阶、一阶子式也都等于1．即

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad |1| = 1.$$

这一现象并非偶然，经观察、思考、联想，发现这些行列式的元素从左角起构成"杨辉三角"的一部分．考虑到"杨辉三角"的每一行都是二项展开式的系数，我们将"杨辉三角"表示如下



$$
\begin{array}{c}
C_0^0 \\
C_1^0 \quad C_1^1 \\
C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\
C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\
C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_{n-1}^0 \quad C_{n-1}^1 \quad \cdots \quad C_{n-1}^{r-1} \quad C_{n-1}^r \quad \cdots \quad C_{n-1}^{n-2} \quad C_{n-1}^{n-1} \\
C_n^0 \quad C_n^1 \quad \cdots \quad \cdots \quad C_n^r \quad \cdots \quad \cdots \quad C_n^{n-2} \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

于是，猜想有如下命题：

设$C_0^0=1$，则

$$\begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & C_2^2 & \cdots & C_{n-2}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} \\ C_1^0 & C_2^1 & C_3^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} & C_n^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n-2}^0 & C_{n-1}^1 & C_n^2 & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} & C_{2n-3}^{n-1} \\ C_{n-1}^0 & C_n^1 & C_{n+1}^2 & \cdots & C_{2n-3}^{n-2} & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = 1.$$

试用数学归纳法证明上述命题，记左边的行列式为D_n。

1）$D_1=|C_0^0|=1$，命题成立；

2）假设$D_k=1$，即

$$\begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_{k-2}^{k-2} & C_{k-1}^{k-1} \\ C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{k-1}^{k-2} & C_k^{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{k-2}^0 & C_{k-1}^1 & \cdots & C_{2k-4}^{k-2} & C_{2k-3}^{k-1} \\ C_{k-1}^0 & C_k^1 & \cdots & C_{2k-3}^{k-2} & C_{2k-2}^{k-1} \end{vmatrix} = 1.$$

则 $$D_{k+1}=\begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_{k-2}^{k-2} & C_{k-1}^{k-1} & C_k^k \\ C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{k-1}^{k-2} & C_k^{k-1} & C_{k+1}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{k-2}^0 & C_{k-1}^1 & \cdots & C_{2k-4}^{k-2} & C_{2k-3}^{k-1} & C_{2k-2}^k \\ C_{k-1}^0 & C_k^1 & \cdots & C_{2k-2}^{k-2} & C_{2k-2}^{k-1} & C_{2k-1}^k \\ C_k^0 & C_{k+1}^1 & \cdots & C_{2k-2}^{k-2} & C_{2k-1}^{k-1} & C_{2k}^k \end{vmatrix}$$

从最下横行起，每一行顺序减去上面一行，并由组合数的性质$C_{n+1}^m-C_n^m=C_n^{m-1}$得

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} 1 & C_1^1 & C_2^2 & \cdots & C_{k-1}^{k-1} & C_k^k \\ 0 & C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{k-1}^{k-2} & C_k^{k-1} \\ 0 & C_2^0 & C_3^1 & \cdots & C_k^{k-2} & C_{k+1}^{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & C_{k-1}^0 & C_k^1 & \cdots & C_{2k-3}^{k-2} & C_{2k-2}^{k-1} \\ 0 & C_k^0 & C_{k+1}^1 & \cdots & C_{2k-2}^{k-2} & C_{2k-1}^{k-1} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} C_{1}^{0} & C_{2}^{1} & \cdots & C_{k-1}^{k-2} & C_{k}^{k-1} \\ C_{2}^{0} & C_{3}^{1} & \cdots & C_{k}^{k-2} & C_{k+1}^{k-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ C_{k-1}^{0} & C_{k}^{1} & \cdots & C_{2k-3}^{k-2} & C_{2k-2}^{k-1} \\ C_{k}^{0} & C_{k+1}^{1} & \cdots & C_{2k-2}^{k-2} & C_{2k-1}^{k-1} \end{vmatrix}
$$

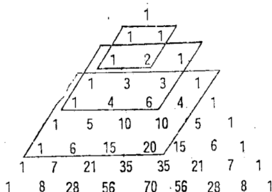
从最右直列起，每一列顺序减去左面一列，并由

$C_{n+1}^{m} - C_{n}^{m-1} = C_{n}^{m}$ 得

$$
D_{k+1} = \begin{vmatrix} C_{1}^{0} & C_{1}^{1} & \cdots & C_{k-2}^{k-2} & C_{k-1}^{k-1} \\ C_{2}^{0} & C_{2}^{1} & \cdots & C_{k-1}^{k-2} & C_{k}^{k-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ C_{k-1}^{0} & C_{k-1}^{1} & \cdots & C_{2k-4}^{k-2} & C_{2k-3}^{k-1} \\ C_{k}^{0} & C_{k}^{1} & \cdots & C_{2k-3}^{k-2} & C_{2k-2}^{k-1} \end{vmatrix} = D_{k} = 1.
$$

由以上过程可知，命题成立！

继续观察“杨辉三角”经计算发现



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 10 & 10 \\ 1 & 6 & 15 & 20 \end{vmatrix} = 1, \cdots$$

这就是说，以“杨辉三角”第n行的n个元素作为第一行，向下依次再取$n-1$行的左边的前n个元素，这样组成的n阶行列式等于1。

不仅如此，还可发现

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 1,\quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 10 \\ 1 & 6 & 15 \end{vmatrix} = 1.\quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 & 10 \\ 1 & 6 & 15 & 10 \\ 1 & 7 & 21 & 35 \\ 1 & 8 & 28 & 56 \end{vmatrix} = 1.$$

等等．于是又提出如下命题：

以“杨辉三角”的第r行中左边的n个元素（$r \geq n$）作为第一行，向下依次再取$n-1$行中左边的前n个元素，这样组成的n阶行列式等于1．即

$$D_n = \begin{vmatrix} C_{r-1}^{0} & C_{r-1}^{1} & C_{r-1}^{2} & \cdots & C_{r-1}^{n-2} & C_{r-1}^{n-1} \\ C_{r}^{0} & C_{r}^{1} & C_{r}^{2} & \cdots & C_{r}^{n-2} & C_{r}^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r+n-3}^{0} & C_{r+n-3}^{1} & C_{r+n-3}^{2} & \cdots & C_{r+n-3}^{n-2} & C_{r+n-3}^{n-1} \\ C_{r+n-2}^{0} & C_{r+n-2}^{1} & C_{r+n-2}^{2} & \cdots & C_{r+n-2}^{n-2} & C_{r+n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = 1.$$

仍可用数学归纳法对n予以证明，得知上述命题仍成立。

读者可再寻求“杨辉三角”中的其他行列式问题。

7．矩阵相乘的Falk图示法

本方法由德国人*S．Falk*于1951年提出（详见*G．Dietrich*和*H．Stahl*合著《*Matrizen and Determinanten*》，*VEB Fachbuchverlag Leipzig*（1973）版——德文，第156—162页。这里转摘自《数学通报》91年1—4期），其优点除直观外，还兼有结果校验的功能，特别适用于数值矩阵的计算。现以实例简介如下。

1）设

$$A=\begin{pmatrix}2&1&4&2\\1&3&2&1\\1&0&1&1\\2&3&4&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

试求AB。

解　见下图示

				2	2
				1	3
				0	1
				1	1
2	1	4	2	7	13
1	3	2	1	6	14
1	0	1	1	3	4
2	3	4	1	8	18

AB

其中例如：4 =（1×2）+（0×3）+（1×1）+（1×1）。

对上述结果可分别用图示进行列校验和行校验。

结果的列校验如下：

1+3+0+3 = 7

13+14+4+18 = 49

（6×2）+（7×3）+

（11×1）+（5×1）= 49 .

				2	2
				1	3
				0	1
				1	1
2	1	4	2	7	13
1	3	2	1	6	14
1	0	1	1	3	4
2	3	4	1	8	18
6	7	11	5	24	49

列校验用

结果的行校验如下：

1 + 3 = 4

6 +14 = 20

（1×4）+（3×4）+

（2×1）+（1×2）= 20

				2	2	4
				1	3	4
				0	1	1
				1	1	2
2	1	4	2	7	13	20
1	3	2	1	6	14	20
1	0	1	1	3	4	7
2	3	4	1	8	18	26

行校验用

2）设

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&1&2&1\\1&1&0&2\\2&0&4&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&0\\3&1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

试求$ABCD$。

有如下两种方法

①从左向右计算（附结果的列校验）

B

1	2
2	1
1	0
3	1

C

1	2	1
0	1	0

D

2	1
0	1
1	1

A				AB		ABC			ABCD	
1	3	2	1	12	6	12	30	12	36	54
0	1	2	1	7	2	7	16	7	21	30
1	1	0	2	9	5	9	23	9	27	41
2	0	4	1	9	5	9	23	9	27	41
4	5	8	5	37	18	37	92	37	111	166

列校验用

②从右向左计算（附结果的行校验）

								行校验用
D						2	1	3
						0	1	1
						1	1	2
C		1	2	1	CD	3	4	7
		0	1	0		0	1	1
B			1	2	BCD	3	6	9
			2	1		6	9	15
			1	0		3	4	7
			3	1		9	13	22
A	1	3	2	1	ABCD	36	54	90
	0	1	2	1		21	30	51
	1	1	0	2		27	41	68
	2	0	4	1		27	41	68

8. 矩阵初等变换后逆阵的求法

可逆方阵A经初等变换后，所得方阵的逆阵如何求？有如下结论

命题1 对调A中i、j两行（列）所得方阵A_{ij}仍可逆，且A_{ij}^{-1}可由A^{-1}中对调i、j两列（行）得到。

证明 A_{ij}可逆是显然的，下面只证明行变换，列变换同理可证。

因$A_{ij}=E_{ij}A$，故$A_{ij}^{-1}=A^{-1}E_{ij}^{-1}=A^{-1}E_{ij}$。

得证！

同法可证

命题 2　以数$K\neq 0$乘A的第i行（列）所得方阵$A_i(k)$仍可逆，且〔$A_i(k)$〕$^{-1}$可由A^{-1}中第i列(行)乘以$\frac{1}{k}$得到。

命题 3　以k乘A的第j行（列）加到第i行（列）上所得方阵$A_{ij}(k)$仍可逆，且〔$A_{ij}(k)$〕$^{-1}$可由A^{-1}中第i列(行)乘以（$-k$）加到第j列（行）上得到。

当A^{-1}已知时，对于A经初等变换后所得方阵的逆阵，上述命题提供了简捷求法。例如

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

不难求得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 3 & 6\\ 2 & 1 & -6 & -10\end{pmatrix}.$$

如将A的一、三两行对调，则相应将A^{-1}的一、三列对

调得

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 6 \\ -6 & 1 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

如将A的第四列$\times(-4)$，则相应将A^{-1}第四行$\times(-4^{-1})$，得

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

如将A的第四行×3加到第一行上，则相应将A^{-1}第一列×（－3）加到第四列上，得

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & -6 & -16 \end{pmatrix}.$$

相仿地，对矩阵A的行、列施行轮换后其逆阵 可 由 对A^{-1}施行相应的轮换而得到，即有

命题 4 对可逆方阵 A 作一次行（列）轮换所得方阵仍可逆，且其逆阵可由对 A^{-1} 相应作一次列（行）轮换得到。

这里，轮换的意义是这样的：将A的第一行（列）移到最后一行（列），其余各行（列）均前移一行（列），称为对A的一次行（列）轮换。显然，一次行（列）轮换相当于将第一行（列）依次与后面各行（列）对调。故命题4可由命题1直接得到。

例如，由

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

可得

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

等等。

9．分块矩阵的准消法变换及其应用

处理分块矩阵的有关问题，采用准消法变换的方法，比较简捷，便于掌握，有规律可循。

1）分块矩阵的准消法变换

用$(A_{ij})_{r\times s}$表示通常的第i行与第j列处的小块为$m_i\times n$矩阵A_{ij}的分块矩阵($i=1,2,\cdots,r$；$j=1,2,\cdots,s$)。当形式地把每个A_{ij}看成一个元素时，分块矩阵$(A_{ij})_{r\times s}$便形式地成为一个$r\times s$矩阵。约定，把这个形式矩阵的

第i行与第j列分别叫做分块矩阵（A_{ij}）$_{r\times s}$的第i行与第j列。

定义1 设分块矩阵如上所述。则称下列变换为分块矩阵的准消法变换：把分块矩阵（A_{ij}）$_{r\times s}$的第i行（或j列）左（或右）乘$m_k\times m_i$（或$n_j\times n_l$）矩阵$B\neq 0$后加到（A_{ij}）$_{r\times s}$的第k行（或l列）上去（$k\neq i$，$l\neq j$）。

定义2 设E_{n_i}表示$n_i\times n_i$单位矩阵。则称由分块单位矩阵$diag$（E_{n_1}，E_{n_2}，…，E_{n_r}）经过一次准消法变换而得到的分块矩阵为准消法矩阵。

下述命题和定理显然是正确的。

命题1 准消法矩阵恒可表为若干个消法矩阵的乘积。

命题2 准消法矩阵恒可逆，且其逆仍为准消法矩阵。

定理1 设（A_{ij}）$_{r\times s}$为任意分块矩阵，则对（A_{ij}）$_{r\times s}$的行（或列）施以某个准消法变换的结果，相当于用相应的准消法矩阵左（或右）乘（A_{ij}）$_{r\times s}$。

定理2 准消法变换不改变矩阵的秩、行列式及矩阵的可逆性。

我们还可以定义分块矩阵的准倍法变换和准换法变换，并有相应结果，此处略去。

2）准消法变换与矩阵的秩

引理1 秩A+秩$B\leq$秩$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$，$C=0$时等号成立。

引理2 秩$A_i\leq$秩$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$，$i=1，2，3，4$。上二引理成立是显然的。

定理3 秩$(A+B)\leq$秩$A+$秩B。

证明 由$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix}$及定理2，引理2即知定理成立。

推论1 秩$(A, B)\leq$秩$A+$秩B。

推论2 $|$秩$A-$秩$B|\leq$秩$(A+B)$。

定理4 秩$ABC\geq$秩$AB+$秩$BC-$秩B。

证明 由$\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}$及定理2，引理1即得所证结论。

推论3 秩$AB\geq$秩$A+$秩$B-B$之行数。

推论4 秩秩$AB\leq min\{$秩A，秩$B\}$。

推论5 若A，B均为n阶方阵，且$AB=0$，则秩$A+$秩$B\leq n$。

推论6 秩$(A^3)\geq 2$秩$(A^2)-(A)$

推论7 秩$(A^m)+$秩$(A^{m+2k})\geq 2$秩(A^{m+k})，这里m，k为非负整数。

定理5 秩$(A-E)+$秩$(B-E)\geq$秩$(AB-E)$。

证明 由$\begin{pmatrix} A-E & 0 \\ 0 & B-E \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} AB-E & AB-A \\ B-E & B-E \end{pmatrix}$

及定理2，引理2即得结论。

推论8 秩$(AB+A+B)\leq$秩$A+$秩B。

定理6 设A为n阶方阵，且$A^2=E$，则秩（$E+A$）+秩（$E-A$）$=n$。

证明 由$\begin{pmatrix} E+A & 0 \\ 0 & E-A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(E-A^2) \end{pmatrix}$，

$A^2=E$ 及定理2，引理1即得结论。

可类似地证明

定理7 设A是n阶方阵且适合$A^2=A$，则秩A+秩（$E-A$）$=n$。

定理8 设A为$m\times n$矩阵，则秩（$E_n-\overline{A'}A$）－秩（$E_m-A\overline{A'}$）$=n-m$。

证明 由$\begin{pmatrix} E_m-A\overline{A'} & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_m & A \\ \overline{A'} & E_n \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n-\overline{A'}A \end{pmatrix}$及定理2，引理1即得结论。

定理9 设A，B分别为$m\times n$，$n\times m$矩阵，则秩（$A-ABA$）=秩A+秩（E_n-BA）$-n$。

证明 由$\begin{pmatrix} A-ABA & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & A \\ BA & E_n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_n - BA \end{pmatrix}$$ 及定理2，引理1即得结论。

推论 9 X为$A_{m\times n}$的一个广义逆的充分必要条件是秩A+秩$(E_n - XA) = n$。

定理10 设A为n阶可逆矩阵，α，β是n维列向量，则秩$(A+\alpha\beta') \geq n-1$，且秩$(A+\alpha\beta') = n$的充分必要条件是$\beta' A^{-1}\alpha \neq -1$。

证明 由
$$\begin{pmatrix} A+\alpha\beta' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta' & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1+\beta' A^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$
及定理2，引理1易得结论。

上述关于矩阵秩的17个性质，都可用分块矩阵的方法来证明。

3）准消法变换与行列式

引理 3 对正方矩阵A，B有 $\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|$。

引理 4 对n阶方阵A，B有 $\begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix}$
$= (-1)^{n^2}|A|\,|B|$。

引理5　若$|A|\neq 0$，则$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|$。

定理11　对任意的n阶方阵A和B，恒有$|AB| = |A||B|$。

证明　由$\begin{pmatrix} B & -E_n \\ 0 & A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B & -E_n \\ AB & 0 \end{pmatrix}$及定理2，引理3，引理4，对上式两端取行列式易得结论。

定理12　设A，B，C，D都是n阶方阵，且$AC=CA$，则$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$。

证明　易见有$\delta>0$，使当$\lambda\in(0,\delta)$时，$|\lambda E+A|\neq 0$，且$\lambda E+A$与C可换，故由引理5得$\begin{vmatrix} \lambda E+A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(\lambda E+A)D-CB|$。令$\lambda\to 0$，便得结论。

定理13　设A为n阶方阵，U，V为n维列向量，A^*为A的伴随矩阵，则$|A+UV'| = |A| + V'A^*U$。

证明　显然存在$\delta>0$，使当$\lambda\in(0,\delta)$时，$|\lambda E+A|\neq 0$。

故由 $\begin{pmatrix} \lambda E+A & U \\ -V' & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (\lambda E+A)+UV' & 0 \\ -V' & 1 \end{pmatrix}$

及定理2，引理3，引理5，上式两端取行列式得 $|(\lambda E+A)+UV'| = |\lambda E+A| + V'(\lambda E+A)^*U$，令$\lambda\to 0$，便得所证等式。

推论10 设U，V为n维列向量，则 $|E+UV'| = 1+V'U$。

定理14 设A，B分别是$m\times n$，$n\times m$矩阵，而$m\geq n$，则对任何数$\lambda\neq 0$，都有$\lambda^{m-n}|\lambda E_n - BA| = |\lambda E_m - AB|$。

证明 由 $\begin{pmatrix} \lambda E_m - AB & 0 \\ B & E_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} \lambda E_m & 0 \\ B & E_n - \lambda^{-1}BA \end{pmatrix}$ 及定理2，引理3，对上式两边取行列式即得结论。

推论11 设A，B分别为$m\times n$和$n\times m$矩阵，则 $|E_m - AB| = |E_n - BA|$。

推论12 设A，B都是n阶方阵，则AB与BA有相同的特征多项式。

定理15 设A，B都是n阶实方阵，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} \geq 0$。

证明 由 $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ iA-B & A+iB \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} A-iB & B \\ 0 & A+iB \end{pmatrix}$ 及定理2，引理3，对

上式两端取行列式，便得 $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}$

$=|A-iB|\cdot|A+iB|=|A+iB||\overline{A+iB}|\geq 0$。

4）分块矩阵与可逆矩阵

下面用分块矩阵的方法来处理几类特殊矩阵的可逆性问题。

定理16 设A是m阶可逆矩阵，B，C，D分别是$m\times n$，$n\times m$，$n\times n$矩阵，如果$|D-CA^{-1}B|\neq 0$，则

$W=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 可逆，且 $W^{-1}=$

$$\begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

证明 由题设知A，$D-CA^{-1}B$均可逆，故由

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}。$$

易知W可逆，且由上式易求得W^{-1}，即得结论。

推论13 设A为n阶可逆矩阵，U，V是n维列向量。如果

$$V'AU\neq a\text{，则}\begin{pmatrix} A & U \\ V' & a \end{pmatrix}\text{可逆，且其逆为}$$

$$\begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}UV'A^{-1}(a-V'AU)^{-1} & -A^{-1}U(a-V'A^{-1}U)^{-1} \\ -V'A^{-1}(a-V'A^{-1}U)^{-1} & (a-V'A^{-1}U)^{-1} \end{pmatrix}$$

定理17 设A是n阶可逆矩阵，B，C分别是$n\times m$与$m\times n$矩阵，如果$|E_m+CA^{-1}B|\neq 0$，则$A+BC$可逆，且$(A+BC)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(E_m+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$。

证明 由题设及定理16知$\begin{pmatrix} A & -B \\ C & E_m \end{pmatrix}$可逆，故由

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ C & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -C & E_m \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A+BC & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix} \qquad (1)$$

易知$A+BC$可逆。

设$\begin{pmatrix} A & -B \\ C & E_m \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} P & B_1 \\ C_1 & D \end{pmatrix}$，则由定理16知

$P=A^{-1}-A^{-1}B\cdot(E_m+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$。于是由

(1)易得$(A+BC)^{-1}$

$$=(E_n,0)\begin{pmatrix} P & B_1 \\ C_1 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}=P.$$

即得结论。

推论14 设α，β都是n维列向量。如果$\beta'\alpha\neq-1$，则$E_n+\alpha\beta'$可逆，且其逆为$E_n-(1+\beta'\alpha)^{-1}\alpha\beta'$。

推论15 设α，β都是n维列向量，且常数$\sigma\neq0$，如果$\beta'-\sigma^{-1}\neq0$，则$E_n-\sigma\alpha\beta'$可逆，且其逆为$E_n+(1-\sigma\beta'\alpha)^{-1}\sigma\alpha\beta'$。

证明 令$\delta=-\sigma\alpha$，则由题设$-\sigma^{-1}(\beta'\delta+1)=\beta'\alpha-\sigma^{-1}\neq0$，即$\beta'\delta\neq-1$。于是由推论14知$E_n+\delta\beta'$可逆，且$(E_n+\delta\beta')^{-1}=E_n-(1+\beta'\delta)^{-1}\delta\beta'$。即$E_n-\sigma\alpha\beta'$可逆，且其逆为$E_n+\sigma(1-\sigma\beta'\alpha)^{-1}\alpha\beta'$。

10. 线性方程组$A_{mn}X_{n1}=b_{m1}$的矩阵解法

研究线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

写成矩阵形式为$A_{mn}X_{n1}=b_{m1}$

下面用矩阵方法解上述线性方程组（$m=n$时，教材上已有矩阵解法，这里m，n不一定相等）

定义1 设A是$m\times n$矩阵，秩$(A)=m(n)$，则A称行（列）满秩矩阵；当$m=n$时，则A称为满秩矩阵。

定义2 设A是$m\times n$矩阵，若存在$n\times m$矩阵B，使得：$ABA=A$ 则称B是A的一个弱逆阵。记A^-，因而，$A^-=B$。

定理1 数域F上一个$m\times n$矩阵A，总可以通过初等变换化为以下形式的矩阵。

$$\begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

即A_{mn}是F上的矩阵，那么存在m阶可逆阵P和n阶可逆阵Q，使得：

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

定理2 设$m\times n$矩阵A的秩为r，P和Q分别是m，n阶可逆阵，使得：$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$则$B$是$A$的弱逆阵的充分且必要条件是：

$$B=Q\begin{pmatrix} I_r & M_1 \\ M_2 & M_3 \end{pmatrix}P$$

其中M_1，M_2，M_3分别是任意给定的$r\times(m-r)$，$(n-r)\times r$，$(n-r)\times(m-r)$阶矩阵。

证明 若

$$B=Q\begin{pmatrix} I_r & M_1 \\ M_2 & M_3 \end{pmatrix}P\text{，}\qquad\text{验证}$$

$$ABA=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1}\cdot Q\begin{pmatrix} I_r & M_1 \\ M_2 & M_3 \end{pmatrix}P\times$$

$$P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1}$$

$$=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & M_1 \\ M_2 & M_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1}$$

$$=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & M_1 \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1}$$

$$=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1}$$

$$=A$$

所以，B是A的弱逆阵；反之，若B是A的一个弱逆阵，令

$B=Q\begin{pmatrix} X & M_1 \\ M_2 & M_3 \end{pmatrix}P$　由于$ABA=A$，　因此

$$P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1}\cdot Q\begin{pmatrix} X & M_1 \\ M_2 & M_3 \end{pmatrix}P\cdot P^{-1}\times$$

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1}=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1}$$

即 $\begin{pmatrix} X & O \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

也就是$X=I_r$，所以A的弱逆阵必是形如

$$Q\begin{pmatrix} I_r & M_1 \\ M_2 & M_3 \end{pmatrix}P$$

的矩阵。

该定理说明，任意$m\times n$矩阵必有弱逆阵，但是，因为M_1，M_2，M_3是任意选取的，所以弱逆阵并不唯一。

特别，当A是列满秩矩阵时，可令$PA=\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$其中$P$是$m$阶可逆阵，则$A$的弱逆阵$A^-=(I_n M)P$（$M$是$n\times(n-m)$矩阵）。因为：

$$A^-\cdot A=(I_n M)P\cdot P^-\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}=I_n$$

所以列满秩矩阵A的弱逆阵A^-，必是A的左逆阵。同理，当A是行满秩矩阵时，A的弱逆阵A^-必是A的右逆阵。

定理3 设A^-是方程$A\times A=A$的一个特解，则其一般解为：

$$G=A^-+Y-A^-AYAA^-$$

其中Y是任意$n\times m$阶矩阵，A是$m\times n$阶矩阵。

证明
$$\begin{aligned}&A(A^-+Y-A^-AYAA^-)A\\&=AA^-A+AYA-AA^-AYAA^-A\\&=AA^-A+AYA-AYA=A\end{aligned}$$

另一方面，设其任意解为X，取$Y=X-A^-$

则
$$\begin{aligned}X&=A^-+Y\\&=A^-+Y-A^-AA^-+A^-AA^-\\&=A^-+Y-A^-AXAA^-+A^-AA^-AA^-\\&=A^-+Y-A^-A(X-A^-)AA^-\\&=A^-+Y-A^-AYAA^-.\end{aligned}$$

所以任意解都具有所要求的形式。

定理4 设A是$m\times n$矩阵，b是m维列向量，则

1°线性方程组$AX=b$有解的充分且必要条件是存在一个A^-，使得$AA^-b=b$；

2°此时$AX=b$的全部解集是：

$\{A^-b+(I_n-A^-A)Z \mid Z$是任意维$n$列向量$\}$

证明 1°.因为存在A^-，使得$AA^-b=b$，再与方程组$AX=b$比较，可知$X=A^-b$ 是方程组的一个解。反之，$AX=b$是相容的，令X_0是它的一个解，即有：$AX_0=b$。

那么，$b=AX_0=AA^-AX_0=AA^-b$

2° 当$b=0$时，那么方程组为，$AX=0$称为$AX=b$的导出齐次线性方程组。

因为，$A(I_n-A^-A)=A-AA^-A=0$

所以，对任意的Z是任意n维列向量，恒有：$A(I_n-A^-A)Z=0$。即$(I_n-A^-A)Z$是F^n的一个子空间，称为$AX=0$的解空间。

若A_{mn}的秩为r，则有

秩$(A)\geq$秩$(A^-A)\geq$秩(AA^-A)秩A。所以秩A
$A=r$。

因为A^-A是一个幂等矩阵，所以$I-A^-A$是一个幂等矩阵。故秩$(I_n-A^-A)=n-r$。

于是$AX=0$的解集合是：$\{(I_n-A^-A)Z \mid Z$是任意n维列向量$\}$

由于 $A(A^-b+(I_n-A^-A)Z)=AA^-b+A(I_n-A^-A)Z=b$

所以，$AX=b$是相容的，其全部解集合为：$\{A^-b+(I_n-A^-A)Z \mid Z$是任意$n$维列向量$\}$。

定理5 若$AX=b$相容，且$b\neq 0$时，则其解集合为：$\{Gb \mid G$是$AXA=A$的解集$\}$。

证：由定理3知：$AXA=A$的任一解X_0，$X_0\in G$。
$X_0=A^-+Y-A^-AYAA^-$

所以，$Gb=(A^-+Y-A^-AYAA^-)b$

$$=A^-b+Yb-A^-AYAA^-b$$

$$=A^-b+Yb-A^-AYb$$

$$=A^-b+(I_n-A^-A)Yb$$

令$Y_{nm}b_{m1}=Z_{n1}$ 即

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{mn} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

不违背一般性，令$b_1\neq 0$，取$y_{11}=b_1^{-1}\cdot z_1$

$y_{m1}=b_1^{-1}z_2$，… $y_{n1}=b_1^{-1}z_n$，其余$y_{ij}=0$。于是

$Gb=A^-b+(I-A^-A)Z$。Z为任意n维列向量。

总之，设$AX=b$，那么：1°。$AX=b$相容$\Longleftrightarrow AA^-b=b$。2°。$b\neq 0$。$AX=b$的集为：$\{Gb \mid G$ 是$AXA=A$的解集 $\}$。

11. 线性空间替换定理的又一种证明

替换定理是线性代数中一个十分重要的定理，用归纳法，从 $r=1$ 开始证明，学生们颇费理解，本文想从学生易掌握的线性方程组理论入手，给出另一种证明，以利理解本定理和消化前面所学过的知识。

替换定理的叙述如下：

设向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$　　(1)

线性无关，并且每一 α_i 都可以由向量组

$\{\beta_1, \beta_2 \cdots, \beta_s\}$　　(2)

线性表示。那么 $r \leq s$，并且必要时可以对 (2) 中向量重新编号，使得用 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha$ 替换 $\beta_1, \beta_2 \cdots\cdots, \beta_r$ 后，所得的向量组

$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_r, \beta_{+1}, \cdots, \beta_s\}$　　(3)

与 (2) 等价。

证明　设 $\alpha_i = \sum_{k=1}^{s} a_{ki}\beta$　　$i = 1, 2, \cdots, r$.

假若 $r > s$，则线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{s1}x_r = 0 \end{cases} \quad (*)$$

有非零解。

设u_1, $u_2\cdots$, u_r是它的一组非零解，并分别以β_k乘以第k个方程（k＝1，2，…，s）得：

$$(a_{11}u_1+a_{12}u_2+\cdots+a_{1r}u_r)\beta_1=0$$

$$(a_{21}u_1+a_{22}u_2+\cdots+a_{2r}u_r)\beta_2=0$$

……………………………………………

$$(a_{s1}u_1+a_{s2}u_2+\cdots+a_{sr}u_r)\beta_s=0$$

各式相加得：

$$u_1\sum_{k=1}^{s}a_{k1}\beta_k+u_2\sum_{k=1}^{s}a_{k2}\beta_k+\cdots+u_r\sum_{k=1}^{s}a_{kr}\beta_k=0$$

即 $u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+\cdots u_r\alpha_r=0$

所以α_1, α_2, $\cdots$, α_r 线性相关，与已知矛盾，故$r\leq s$。

同时由上面的推导知，方程组(※)的系数矩阵A的秩，长能小于r，否则同样可找到一组非零解，推出α_1，α_2，…，α_r线性相关，与已知矛盾，于是秩$(A)=r$。则对方程组(※)中各方程次序经过调整，可使后$s-r$个方程是前r个方程组^{s}合的结果。不妨设现在这样已经是调整好的，那么由此我们可推知β_1，β_2，…，β_r可由α_1，α_2，…，α_r，β_{r+1}，…，β线性表出。此处的β_1，β_2，…，β_r，β_{r+1}，…，β已重新编号。

事实上，矩阵$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr}\end{pmatrix}$的秩为$r$。

故方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = 0 \end{cases}$$

有唯一解（1_1，1_2，…，1_r）。

对应方程组（※）中的后$s-r$个方程的形状，由这r个方程的左边组合构成，此时右边也须是相应组合，但结果不一定是原来的0。即可得到方程组（＊＊）如下：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{21}x_r = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = 0 \\ a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \cdots + a_{r+1,r}x_r = c_{r+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sr}x_r = c_s \end{cases}$$

同样以β_k分别乘以第k个方程($k=1,2,\cdots,s$)，从而有

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r)\beta_1 = \beta_1$$
$$(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r)\beta_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r)\beta_r = 0$$
$$(a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \cdots + a_{r+1,r}x_r)\beta_{r+1} = c_{r+1}\beta_{r+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sr}x_r)\beta_s = c_s\beta_s$$

各式相加得$x_1\sum_{k=1}^{s}a_{k1}\beta_k+x_2\sum_{k=1}^{s}a_{k2}\beta_k+\cdots$

$$+x_r\sum_{k=1}^{s}a_{kr}\beta_k=\beta_1+c_{r+1}\beta_{r+1}+\cdots+c_s\beta_s$$

即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=\beta_1+c_{r+1}\beta_{r+1}+\cdots+c_s\beta_s$

将1_1，1_2，…，1_r代入后即得

$$\beta_1=1_1\alpha_1+1_2\alpha_2+\cdots+1_r\alpha_r-c_{r+1}\beta_{r+1}-\cdots-c_s\beta_s$$

同理可证β_2，β_3，…β_r可由α_1，α_2，…，α_r，β_{r+1}，…，β_s线性表出。

所以向量组｛β_1，β_2，…，β_s｝与向量组｛α_1，α_2，…，α_r，β_{r+1}，…，β_s｝等价。

12．矩阵可对角化的一个充要条件

这里给出矩阵可对角化的一个充要条件，把判断矩阵是否可对角化的问题与求它的特征向量的问题联系起来，同时也给出了一个不用线性方程组而求得可对角化矩阵的特征向量的方法。

引理 设A、B都是n阶矩阵，则有

$$秩(AB)\geq 秩A+秩B-n$$

定理 设A是数域F上的一个n阶矩阵，A的特征根全在F内，若λ_1、λ_2、…、λ_k是A的全部不同的特征根，其重数分别是r_1，r_2，…，r_k，那么

（i） A可对角化$\Longleftrightarrow$秩 $\left[\prod\limits_{(i\neq j)}(\lambda i-A)\right]=r_j$，

$j=1, 2, \cdots, k$，（1）

（ii）当（1）式成立时，$\prod\limits_{(i\neq j)}(\lambda i-A)$的列空间就是$A$的属于特征根$\lambda i$的特征子空间。

证明 （i）。设A可对角化，则存在可逆矩阵T，使

$T^{-1}AT=diag\{\lambda_1 I_1, \lambda_2 I_2, \cdots, \lambda_k I_k\}$

这里右边是分块对角矩阵，I_i为r_i阶单位矩阵。于是有

$$秩\left[\prod_{(i\neq j)}(\lambda_i I-A)\right]=秩\left(T^{-1}\left[\prod_{(i\neq j)}(\lambda_i I-A)\right]T\right)$$

$$=秩\left[\prod_{(i\neq j)}(\lambda_i I-T^{-1}AT)\right]$$

$$=秩\left[\prod_{(i\neq j)}(\lambda_i I-diag\{\lambda_1 I_1,\lambda_2 I_2,\cdots,\lambda_k I_k\})\right]$$

$$=秩\left[\prod_{(i\neq j)}diag\{(\lambda_i-\lambda_1)I_1,(\lambda_i-\lambda_2)I_2,\cdots,(\lambda_i-\lambda_k)I_k\}\right]$$

$$=秩\left[diag\{0,\cdots,0,\prod_{(i\neq j)}(\lambda_i-\lambda_j)I_i,0,\cdots,0\}\right]$$

$$=j$$

反之，若秩$\left[\prod\limits_{(i\neq j)}(\lambda_i I-A)\right]=r_j$，$j=1, 2, \cdots$，k，则反复引用本文引理可得

$$r_j\geq\sum_{(i\neq j)}秩(\lambda_i I-A)-(k-2)n\geq\sum_{(i\neq j)}(n-r_i)-(k-2)n$$

$$=n-\sum_{(i\neq j)}r_i=r_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k,$$

这里用到了齐次线性方程组（$\lambda_i I-A$）X = 0的解空间的维数不大于λ_i的重数r_i这个结果。于是有

$$\sum_{(i\neq j)}秩(\lambda_i I-A)=\sum_{(i\neq j)}(n-r_i)$$

从而秩（$\lambda_i I-A$）$=n-r_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$，这样A可对角化。

（ii） 设（1）式成立，则A可以对角化，故A的极小多项式为$\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)$，从而 $\prod_{i=1}^{k}(\lambda_i I-A)=0$ 即

$$(\lambda_j I-A)\prod_{(i\neq j)}(\lambda_i I-A)=0$$

这就是说，$\prod_{(i\neq j)}(\lambda_i I-A)$的列空间包含$\lambda_j$的特征子空间中，但由（1），$\prod_{(i\neq j)}(\lambda_i I-A)$的列空间的维数是$r_j$，它正是$\lambda_j$的特征子空间的维数（因秩（$\lambda_j I-A$）$=n-\lambda_j$），故结论(ii)成立。

定理证毕

推论 设A为数域F上的n阶矩阵，A的特征根全在F内，且λ_1，λ_2是A的全部不同的特征根，其维数分别为r_1，r_2，若秩（$\lambda_1 I-A$）$=r_2$，秩（$\lambda_2 I-A$）$=r_1$，则A可对角化，且$\lambda_1 I-A$的列向量组的极大无关组恰是属于λ_2的极大线性无关的特征向量组，$\lambda_2 I-A$的列向量组的极大无关组恰是属于λ_1的极大无关的特征向量组。

利用上述定理及推论，可计算矩阵的特征向量。在矩阵的不同特征根较少时，用这个方法计算特征向量是较方便的。

注意到，当A是实对称矩阵时，$\prod\limits_{(i\neq j)}(\lambda_i I-A)$也是对称矩阵，并且其秩是$r_j$，所以并不需要把$\Pi(\lambda_i I-A)$全部算出，只要找出它的$r_j$个线性无关的列即可。今举例如下：

例1. 设

$$A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$$

易知A的特征根为$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$（二重），因为

$$\lambda_1 I-A=\begin{pmatrix}-6 & -6 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ 3 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

和

$$\lambda_2 I-A=\begin{pmatrix}-3 & -6 & 0\\ 3 & 6 & 0\\ 3 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

的秩分别为2与1，故A可对角化，又因可以选取$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

和 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为$\lambda_2 I - A$的列空间的一个基，故这两个向量是属于λ_2的线性无关的特征向量，同理 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是属于λ_1 的特征向量。

例 2 容易算出实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征根为$\lambda_1 = 1$（二重），$\lambda_2 = 3$ $\lambda_3 = -1$，所以

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 I - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1 I - A)(\lambda_2 I - A) = \begin{pmatrix} 2 & \cdots\cdots \\ -2 & \cdots\cdots \\ -2 & \cdots\cdots \\ 2 & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1 I - A)(\lambda_3 I - A) = \begin{pmatrix} 2 & \cdots\cdots \\ 2 & \cdots\cdots \\ -2 & \cdots\cdots \\ -2 & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_2 I - A)(\lambda_3 I - A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & -2 & \cdots\cdots \\ -2 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & -2 & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

于是可选取

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

分别为λ_3，λ_2，λ_1的线性无关的特征向量。

13．矩阵特征根与特征向量的同步求解法

求解矩阵A的特征根与特征向量，传统方法历来是先求出矩阵A的特征多项式$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|$的全部特征根，然后对每一特征根$\lambda_i$，求齐次线性方程组$(\lambda_i I-A)X=0$的一个基础解系，即为$A$的属于特征根$\lambda_i$的线性无关的特征向量。

这里介绍一种利用矩阵初等变换，在求得矩阵特征根的同时，同步求得各特征根所属的全部线性无关的特征向量，而且它们都巧妙地隐含在同一矩阵中。

这种方法的合理性在于下述两个定理

定理1 设A是秩为r的$n\times m$阶矩阵，且

$$\begin{pmatrix}A_{n\times m}\\I_m\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列初等变换}}\begin{pmatrix}B_{n\times r} & O_{n\times(m-r)}\\ * & P_{m\times(m-r)}\end{pmatrix}$$

其中B是秩为r的列满秩矩阵，则矩阵P所含的$m-r$个列向量就是齐次线性方程组$AX=0$的一个基础解系。

证明 设$P=(p_{r+1}, p_{r+2}, \cdots, p_m)$对$A$施行列的

初等变换相当于右乘一个$m\times m$可逆矩阵。 设

$$(B\vdots 0)=A(*\vdots p)$$

其中（＊：P是$m\times m$可逆矩阵，P是$m\times(m-r)$矩阵，令P_{r+k}（$k=1$、2，…、$m-r$）是矩阵P的列向量，它们线性无关。于是$AP=0$且P_{r+k}是方程$AX=0$的$m-r$个线性无关的解向量。

注意到A的秩为r，则上述$m-r$个向量正是该齐次线性方程组的一个基础解系。

定理2 矩阵A的特征矩阵$F(\lambda)$经列的初等变换可化为下三角的λ—矩阵$B(\lambda)$，且$B(\lambda)$的主对角线上元素乘积的λ多项式的根恰为A的所有特征根。

证明 设$A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$，且

$$F(\lambda)=\begin{pmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) & \cdots\cdots & f_{1n}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) & \cdots\cdots & f_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(\lambda) & f_{n2}(\lambda) & \cdots\cdots & f_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中$f_{ij}(\lambda)=\begin{cases} -\alpha_{ij} & (i\neq j) \\ \lambda-\alpha_{ij} & (i=j) \end{cases}$，显然有秩$F(\lambda)=n$

考察$F(\lambda)$的第一行元素，若$f_{1j}(\lambda)$（$j=2$，3，…，n）不全为0，可任取其中一个不为0的数，不妨设为$f_1(\lambda)$容易通过列的初等变换方法将$F(\lambda)$化成

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ g_{21}(\lambda) & g_{22}(\lambda) & \cdots\cdots & g_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1}(\lambda) & g_{n2}(\lambda) & \cdots\cdots & g_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

利用分块矩阵记为 $\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 \\ * & G(\lambda) \end{pmatrix}$

若$f_{j1}(\lambda)=0$（$j=2, 3, \cdots, n$），则$F(\lambda)$已具有上述形式，只不过此时$f_1(\lambda)$不是λ的零次多项式而是一次多项式。

现在考察$G(\lambda)$的第一行元素。注意到这些元素不可能全为0，否则秩$F(\lambda)<n$，与秩$F(\lambda)=n$矛盾！可任取其中次数最低的一个多项式，不妨设为$g_1(\lambda)$，再对$G(\lambda)$施以列的初等变换，可使该行的其余元素都化为零多项式或次数低于$g_1(\lambda)$的λ多项式；在这些次数低于$g_1(\lambda)$的λ多项式的元素中，再任取其中一个次数最低的多项式，继续如上施以列的初等变换，……，由于$g_1(\lambda)$的次数有限，一系列初等变换可使$G(\lambda)$最终化为

$$\begin{pmatrix} f_2(\lambda) & 0 \\ * & H(\lambda) \end{pmatrix}$$

从而直至最后经列的初等变换，$F(\lambda)$可化为以下三角矩阵

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ & f_2(\lambda) & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ * & & & f_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

这就证明了前一结论。

又因矩阵的初等变换不改变λ—矩阵的秩与行列式因子，易知定理的后一结论也成立。

定理2事实上给出了化特征矩阵为下三角阵，从而求得特征根的列初等变换方法。

设$F(\lambda)=\lambda I-A$，且

$$\begin{pmatrix} F(\lambda) \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{pmatrix} B(\lambda) \\ P(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中$B(\lambda)$为下三角矩阵，则$B(\lambda)$的主对角线上全部元素的乘积的λ多项式的全部根恰为矩阵A的全部特征根。且对于矩阵A的每一特征根λ_i，若矩阵$B(\lambda_i)$中非零向量的列构成列满秩矩阵，那么矩阵$p(\lambda_i)$中和$B(\lambda_i)$中零向量所对应的列向量是属于特征根λ_i的全部线性无关的特征向量；否则继续

$$\begin{pmatrix} B(\lambda_i) \\ P(\lambda_i) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{pmatrix} B^*(\lambda_i) \\ P^*(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

使得$B^*(\lambda_i)$中非零向量的列构成列满秩矩阵，那么$P^*(\lambda_i)$中和$B^*(\lambda_i)$中零向量所对应的列向量是属于特征根λ_i的全部线性无关的特征向量。

例1 求矩阵A的特征根与特征向量，其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

解

$$\begin{pmatrix}F(\lambda)\\ I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & 1\\ 0 & -1 & \lambda-1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-2 & \lambda-1\\ \lambda-1 & -\lambda & \lambda^2-\lambda\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ \lambda-1 & -\lambda & \lambda^2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & \lambda+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ \lambda-1 & \lambda^2 & -\lambda(\lambda-1)^2\\ 0 & 1 & -\lambda+2\\ 0 & -1 & \lambda-1\\ 1 & \lambda+1 & -\lambda^2+\lambda+1\end{pmatrix}$$

由$\lambda(\lambda-1)^2=0$得特征根$\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$（二重）。

当$\lambda_1=0$时，因$B(\lambda_1)$的非零向量的列构成列满秩矩阵，且其最后一个列向量是零向量，故$P(\lambda_1)$中最后一个列向量（2，-1，1）$'$是λ_1的线性无关的特征向量。

同理$\lambda_2=1$的线性无关特征向量是$P(\lambda_2)$中最后一个列

向量(1、0、1)′

例1　求矩阵A的特征根与特征向量，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

解

$$\begin{pmatrix}F(\lambda)\\ I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 2 & \lambda+1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2-1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \lambda+1\end{pmatrix}$$

A的特征根$\lambda_1=1$(二重)，$\lambda_2=-1$

当$\lambda_1=1$时，因$B(\lambda_1)$的非零向量的列构成非列满秩矩阵，故需继续列的初等变换

$$\begin{pmatrix}B(\lambda_1)\\ P(\lambda_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^*(\lambda_1)\\ P^*(\lambda_1)\end{pmatrix}$$

由$B^*(\lambda_1)$的非零向量的构成列满秩矩阵，且其第1、3列

为零向量，故$P^*(\lambda_1)$的第1、3列向量为λ_1的全部线性无关的特征向量，即(1，0，2)′和(0，1，2)′。

易知，从属$\lambda_2=-1$的线性无关的特征向量是(0，1，0)′。

14. 矩阵化为标准形的一个定理的应用

应用哈密尔顿—凯莱定理将线性空间V按特征值分解成不变子空间的直和，有：

定理 设线性变换σ的特征多项式为$f(\lambda)$，它可分解因式为

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

则V可分解成不变子空间的直和

$$V=V_1\dot{+}V_2\dot{+}\cdots\cdots\dot{+}V_s,$$

其中$V_i=\{\xi\mid(\sigma-\lambda_iE)^{r_i}\xi=0,\ \xi\in V\}$，$i=1,2,\cdots,s$（见北京大学数学系编《高等代数》第300页定理12）

我们可以不改变这个定理的证明细节，就可以将该定理推广如下：

定理1 设线性变换σ的零化多项式$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$($\lambda_1$，$\lambda_2$，$\cdots$，$\lambda_s$两两不等)，则V可分解为$\sigma$的不变子空间$V_1$，$V_2$，$\cdots$，$V_s$的直和，其中$V_i=(\sigma-\lambda E)^{r_i}$的核$=f_i(\sigma)$的值域，$f_i(\lambda)=f(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{-r_i}$($i=1$、2、$\cdots$、$s$。)

定理1可用复数域上n维列向量空间C^n与n阶矩阵的语言改述如下：

定理2 设n阶矩阵A的零化多项式$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$($\lambda_1$，$\cdots$，$\lambda_s$两两不等)，则$C^n$可分解为$s$个子空间$V_1$，$\cdots$，$V_s$的直和，其中$V_i=\{\alpha\mid\alpha\in C^n,(A-\lambda_iE)^{r_i}\alpha=0\}$

$=\{f_i(A)\beta \mid \beta\in C^n\}=L(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{it_i})$ $(\alpha_{i1}\cdots,\alpha_{it_i})$ 是$f_i(A)$中t_i个线性无关的向量，即是子空间v_i的一个基 $i=1,2,\cdots,s$。由此可见，$\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1t_1},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{st_s}$ 是C^n的一个基。

应用定理2可解决一些特殊矩阵的Jordan标准形问题。

例1　设n阶矩A满足$A^2=A$，试求使$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}$的矩阵$T$，其中$r$是$A$的秩。

解　因A的零化多项式$f(\lambda)=(\lambda-1)\cdot\lambda$，由定理2知，$V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$，$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r$是$A$的$r$个线性无关的列向量，且$(A-E_n)\alpha_i=0$即$A\alpha_i=1\cdot\alpha_i(i=1,2,\cdots,r)$；$V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$是$A-E_n$的$n-r$个线性无关的列向量，且$A\beta_j=0$（$j=1,2,\cdots,n-r$），由于$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$是$C$的一组基，所以可作可逆矩阵$T=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})$，由分块矩阵运算性质知，$AT=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,0,\cdots,0)$

$$=T\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}，由此得\ T^{-1}AT=\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}。$$

例2　设n阶矩阵A满足$A^2+bA+cE=0$（d，c是复数，且$b^2-4c\neq0$），试求T，使$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1E_r & \\ & \lambda_2E_{n-r}\end{pmatrix}$其中$\lambda_1$，$\lambda_2$是$\lambda^2+b\lambda+c=0$的两个根，$r=$秩$(A-\lambda_2E_n)$。

解 因A的零化多项式$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$，由定理2知，$V_1=L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$($\alpha_1, \cdots, \alpha_r$是$A-\lambda_2E$的r个线性无关的列向量)，且$(A-\lambda_1E_n)\alpha_i=0$，即$A\alpha_i=\lambda_1\alpha_i$ $(i=1, 2, \cdots, r)$； $V_2=L(\beta_1, \cdots, \beta_{n-r})$，($\beta_1, \cdots, \beta_{n-r}$是$A-\lambda_1E$的$n-r$个线性无关的列向量)，且$(A-\lambda_2E_n)\beta_j=0$，即$A\beta_j=\lambda_2\beta_j (j=1, \cdots, n-r)$，由于$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r}$是$C^n$的一个基，所以可作可逆矩阵$T=(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r})$，于是，$AT=(\lambda_1\alpha_1, \cdots, \lambda_1\alpha_r, \lambda_2\beta_1, \cdots, \lambda_2\beta_{n-r})=T\begin{pmatrix}\lambda_1E_r & \\ & \lambda_2E_{n-r}\end{pmatrix}$，即

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1E_r & \\ & \lambda_2E_{n-r}\end{pmatrix}.$$

例3 设n阶矩阵A满足$(A-\lambda_0E)^2=0$，试求矩阵T，使$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_1 & \\ & & & \lambda_0E_{n-2s}\end{pmatrix}$（$J_1$共s个），而$J_1=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$， $s=$秩$(A-\lambda_0E)$。

本题不能直接应用定理2，但利用其解题思路及例1，2所得到启示，有如下解法。

解 因秩$(A-\lambda_0E)=s$，则可令$\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_s}$是$A-\lambda_0E$中$s$个线性无关的列，$A_{i_j}$表示$A-\lambda_0E$中第$i_j$列$(j=1,$

2，…，s）。于是（$A-\lambda_o E$）$\alpha_{ij}=0$，即$A_{ij}=\lambda_o\alpha_{ij}$（j = 1，2，…，$s$），又因秩（$A-\lambda_o E$）$=s$，所以$A-\lambda_o E$的核空间的基可令为$\alpha_{i_1}$，…，$\alpha_{is}$，$\beta_1$，…，$\beta_{n-2s}$，此时$A\beta_t=\lambda_o\beta_t$（t = 1，…，n－2s），可以证明，$\alpha_{i_1}$，…，$\alpha_{is}$，$\alpha_{i_1}+e_{i_1}$，…，$\alpha_{is}+e_{is}$，$\beta_1$，…，$\beta_{n-2s}$是$C^n$的一个基，其中$e_{ij}$表示$E_n$的第ij列，（j = 1，2，…，$s$）。于是可作可逆矩阵

$$T=[\alpha_{i_1},\ \alpha_{i_1}+e_{i_1},\ \alpha_{i_2},\ \alpha_{i_2}+e_{i_2},\ \cdots,\ \alpha_{is}+e_{is},\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_{n-2s}]$$

由此可得

$$AT=[\lambda_o\alpha_{i_1},\ \lambda_o(\alpha_{i_1}+e_{i_1}+\alpha_{i_1}),\ \lambda_o\alpha_{i_2},\lambda_o(\alpha_{i_2}+e_{i_2}+\alpha_{i_2}),\ \cdots,\ \lambda_o(\alpha_{is}+e_{is}+\alpha_{is}),\ \lambda_o\beta_1,\ \cdots,\ \lambda_o\beta_{n-2s}]$$

$$=T\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_1 \end{matrix}\right\} s\text{个} & \\ & \lambda_o E_{n-2s} \end{pmatrix},\quad 其中J_1=\begin{pmatrix}\lambda_o & 1\\ 0 & \lambda_o\end{pmatrix},$$

例4 设n阶Hermite矩阵A的零化多项式$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$两两不等，试求①可逆矩阵$T$，使$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 E_{t_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_{t_s}\end{pmatrix}$，②酉矩阵$U$，使$U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 E_{t_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_{t_s}\end{pmatrix}$，其中$t_1+\cdots+t_s=n$

解 ①，由题设，Hecmite矩阵是可对角化的，所以由

最小多项式的性质，A的零化多项式可令为$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)$，其中$\lambda_i$是$A$的特征值（$i=1, 2, \cdots, s$），据定理2知$V_i=L(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_{t_i}})$，其中$\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_{t_i}}$是$f_i(A)=(A-\lambda_1E_{t_1})\cdots(A-\lambda_{i-1}E_{t_{i-1}})(A-\lambda_{i+1}E_{t_{i+1}})\cdots(A-\lambda_sE_{t_s})$的$t_i$中线性无关的列向量，且$A\alpha_{ij}=\lambda_i\alpha_{ij}$（$j=1, 2, \cdots, t_i$，$i=1, 2, \cdots, s$）

又因$\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1t_1}, \cdots, \alpha_{s1}, \cdots, \alpha_{st_s}$是$C^n$的一组基，所以可作可逆矩阵$T=[\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1t_1}, \cdots, \alpha_{s1}, \cdots, \alpha_{st_s}]$，于是$AT=[\lambda_1\alpha_{11}, \cdots, \lambda_1\alpha_{1t_1}, \cdots, \lambda_s$

$$\alpha_{s1}, \cdots, \lambda_s\alpha_{st_s}]=T\begin{pmatrix}\lambda_1E_{t_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_sE_{t_s}\end{pmatrix},$$

②，再对①中的$\alpha_{i1}, \cdots\alpha_{it_i}$用Schmidt标准正变化法化为$\beta_{i1}, \cdots, \beta_{it_i}$，且有$A\beta_{ij}=\lambda_i\beta_{ij}$（$j=1, 2, \cdots, t_i$）（$i=1, 2, \cdots, s$），由于属于不同特征值的特征向量必正交，所以$\beta_{11}, \cdots, \beta_{1t_1}, \cdots, \beta_{s1}, \cdots, \beta_{st_s}$是$C^n$的一个标准正交基，于是有$\bar{U}=[\beta_{11}, \cdots, \beta_{1t_1}, \cdots, \beta_{s1}, \cdots, \beta_{st_s}]$，因此$A\bar{U}=[\lambda_1\beta_{11}, \cdots, \lambda_1\beta_{1t_1}, \cdots, \lambda_s\beta_{s1},$

$$\cdots, \lambda_s\beta_{st_s}]=\bar{U}\begin{pmatrix}\lambda_1E_{t_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_sE_{t_s}\end{pmatrix},\quad \text{即得(3)式}$$

例4的第一部分可不改变证明细节便可推广到可对角化矩阵上去，此时例1，2就是其特例。

如下推论是有趣的。

推论 设n阶矩阵A的零化多项式$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$，$\lambda_1$，…，$\lambda_s$两两不等，$f_i(\lambda)=f(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{-r_i}$，$i=1$，2，…，$s$，则 $\sum_{i=1}^{s}$秩$f_i(A)=n$，即若$f_i(A)$的各列生成的子空间的维数为$d_i(i=1,\cdots s)$，则$\sum_{i=1}^{s}d_i=n$；进而设$f_i(A)$的列向量α_{i1}，…α_{it_i}是$f_i(A)$的列向量组的极大无关组($i=1$，2，…，s)，则矩阵$T=[\alpha_{11},\cdots,\alpha_{it_i},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{s_{ts}}]$是可逆阵。

例5 设n阶方阵A满足$A^3=A$，则有T，

使$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}E_s & & \\ & -E_{r-s} & \\ & & 0\end{pmatrix}$，其中秩$(A)=r$，秩$(A^2+A)=s$。

解 因A的零化多项式是$f(\lambda)=\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)$，由定理2及推论知$V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r})$，其中$\alpha_1$，…，$\alpha_{n-r}$是矩阵$(A-E_n)(A+E_n)$的列向量组的极大无关组($r=$秩$(A)$)；$V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta)$，其中$\beta_1$，…，$\beta$是$A(A+E_n)$的列向量组的极大无关组；$V_3=L(\gamma_1,\cdots,\gamma_{r-s})$，$r_1$，…，$r_{r-s}$是$A(A-E_n)$的列向量组的极大无关组。于是$A\alpha_i=0(i=1,\cdots,n-r)$；$A\beta_j=\beta_j(j=1,\cdots,s)$；$A\gamma_k=-\gamma_k(k=1,\cdots,r-s)$，则$T=[\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_{r-s},\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}]$是可逆的矩阵，从而$AT=[\beta_1,\cdots,$

$\beta_s, -\gamma_1, \cdots, -\gamma_{r-s}, 0, \cdots, 0] = T\begin{pmatrix} E_s & & \\ & -E_{r-s} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，

由此得证。

例6 设n阶方阵A的零化多项式$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^3$，试求

$$T，使T^{-1}AT=\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_1 \end{matrix}\right\} r个 & & \\ & \left.\begin{matrix} J_2 & & \\ & \ddots & \\ & & J_2 \end{matrix}\right\} s个 & \\ & & \lambda_0 E_t \end{pmatrix}，$$

其中$J_1=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$，$J_2\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$，秩$(A-\lambda_0E)^2=r$，秩$(A-\lambda_0E)=2r+s$，$3r+2s+t=n$。

解 因秩$(A-\lambda_0E)^2=r$，先取$(A-\lambda_0E)^2$中r个线性无关的列向量α_{ij}（α_{ij}为$(A-\lambda_0E)^2$中的第i_j列（$j=1, 2, \cdots, r$），相应地再取$(A-\lambda_0E)$中r个线性无关的列向量β_{ij}（β_{ij}为$A-\lambda_0E$中的第i_j列，最后取e_{ij}（$j=1, 2, \cdots, r$，）（e_{ij}是E_n中第i_j列），于是$A(\alpha_{ij}, \beta_{ij}, e_{ij})=(\lambda_0\alpha_{ij}, \alpha_{ij}+\lambda_0\beta_{ij}, \beta_{ij}+\lambda_0e_{ij})=(\alpha_{ij}, \beta_{ij}, e_{ij})J_1$，$i=1, 2, \cdots, r$，（1）；又因秩$(A-\lambda_0E)=2r+s$，所以$A-\lambda_0E$中有$s$个线性无关的列向量$\gamma_{Rq}(q=1, \cdots, s)$属于$(A-\lambda_0E$的核，且可得$\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{ir}, \gamma_{R1}, \gamma_{Rs}, \delta_1, \cdots, \delta_t$是$(A-\lambda_0E$的核的一个基，因此$A\delta_j=\lambda_0\delta_j$（$j=1, \cdots, t$），（2）；$A(\gamma_{Rq}, e_{Rq})=(\lambda_0\gamma_{Rq}+\lambda_0 e_{Rq})=(\gamma_{Rq}, e_{Rq})J_2$（$q=$

1，…，s），（3），由此可作可逆矩阵$T=[\alpha_{i1},\cdots,\beta_{i1},e_{i1},\cdots,\alpha_{ir},\beta_{1r},e_{1r},\gamma_{R1},e_{R1},\cdots,\gamma_{Rs},e_{rs},\delta_1,\cdots,\delta_t]$，再根据（1），（2），(3)式即可得到

$$AT=T\begin{pmatrix} J_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_1 & & & & \\ & & & J_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & J_2 & \\ & & & & & & \lambda_0 E_t \end{pmatrix}$$

（其中J_1共r个，J_2共s个）。

15. Cayley—Hamilton定理的推广

下面我们将Cayley—Hamilton定理给以推广。设R为带单位元的交换环。A为R上的n阶方阵，E为n阶单位矩阵，$R[\lambda]$为R上的一元多项式环，$f(\lambda)=det(\lambda E-A)\in R[\lambda]$为$A$的特征多项式。Cayley—Hamilton定理断言：A为$f(\lambda)$的根，即$f(A)=0$。

设$M_n(R)$为R上n阶方阵环，取环$M_n(R)$上的多项式$F(\lambda)=E\lambda-A$，显然A为矩阵系数的多项式$F(\lambda)$的根，$F(A)=EA-A=0$，令$f(\lambda)=det(F(\lambda))$，表示当视$F(\lambda)$为$R$上的λ－矩阵时的行列式，并称其为矩阵多项式$F(\lambda)$的行列式。则$f(\lambda)$为$R$上的一元多项式。由Cayley－Hamilton定理，$f(A)=0$，即A是以A为根的矩阵多项式$F(\lambda)$的行列式$f(\lambda)$的根。下述定理给出了任意以A为根的矩阵多项式$F(\lambda)$的行列式$f(\lambda)$也以A为根。

定理 设R为带单位元的交换环，$M_n(R)[\lambda]$为环

R上的n阶方阵环$M_n(R)$上的一元多项式环。如果$F(\lambda)\in M_n(R)\cdot[\lambda]$，$F(A)=0$，令$\varphi(\lambda)=det(F(\lambda))\in R[\lambda]$表示当视$F(\lambda)$为$R$上的$\lambda$－矩阵时的行列式，则$\varphi(A)=0$。

我们先证明以下引理。

引理　设T为有单位的环(不必是交换的)，S为T的扩环，$T[\lambda]$为T上的一元多项式环，$f(\lambda)$，$g(\lambda)\in T[\lambda]$，$a\in S$，$p(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda)$。如果$a$与$g(\lambda)$的系数皆可换，则

$$p(a)=f(a)g(a)$$

特别地，当T在S中心时，则对每个$a\in S$，有上式成立。

证明　设$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n$，$a_n\neq 0$，

$$g(\lambda)=b_0+b_1\lambda+\cdots+b_m\lambda^m,\quad b_m\neq 0,$$

则

$$p(\lambda)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)\lambda+\cdots+a_nb_m\lambda^{n+m}$$

由于a与各b_j可换，故有：

$$\begin{aligned}f(a)g(a)&=(a_0+a_1a+\cdots+a_na^n)(b_0+b_1a+\cdots+b_ma^m)\\&=a_0b_0+a_0b_1a+a_1b_0a+a_1b_1a^2+\cdots\\&\quad+a_na^n\cdot b_ma^m\\&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)a+\cdots+a_nb_ma^{n+m}\\&=p(a)\end{aligned}$$

引理证毕。下证定理。

设$F(\lambda)=B_0\lambda^m+B_1\lambda^{m-1}+\cdots+B_{m-1}\lambda+B_m$，其中$B_0$，$B_1$，…，$B_m\in M_n(R)$。在$M_n(R)$上的一元多项式环

$M_n(R)[\lambda]$ 中，用$E\lambda-A$右除$F(\lambda)$，得

$$F(\lambda)=Q(\lambda)(E\lambda-A)+F_0, \quad (1)$$

其中$Q(\lambda)=Q_0\lambda^{m-1}+Q_1\lambda^{m-2}+\cdots+Q_{m-1}$，而$Q_0$，$Q_1$，$\cdots$，$Q_{m-1}\in M_n(R)$．可通过展开（1）式后得到

$B_0\lambda^m+B_1\lambda^{m-1}+\cdots+B_{m-1}\lambda+B_m=(Q_0\lambda^{m-1}+Q_1\lambda^{m-2}+\cdots+Q_{m-1})(E\lambda-A)+F_0$，$B_0=Q_0$，$B_1=Q_1-Q_0A$，$B_2=Q_2-Q_1A,\cdots,B_{m-1}=Q_{m-1}-Q_{m-2}A,B_m=F_0-Q_{m-1}A$，即取

$$\begin{aligned}
Q_0&=B_0\\
Q_1&=B_1+Q_0A,\\
Q_2&=B_2+Q_1A,\\
&\cdots\cdots\\
Q_{m-1}&=B_{m-1}+Q_{m-2}A,\\
F_0&=B_m+Q_{m-1}A,
\end{aligned}$$

由于A与$E\lambda-A$的系数E和A可换，据引理，$0=F(A)=Q(A)(EA-A)+F_0=F_0$代入（1）得

$$F(\lambda)=Q(\lambda)(E\lambda-A). \quad (2)$$

视（2）的两端为R上λ－矩阵，并取行列式得

$$\det(F(\lambda))=\det(Q(\lambda))\cdot\det(E\lambda-A),$$

记$\varphi(\lambda)=\det(F(\lambda))$，$g(\lambda)=\det(Q(\lambda))$，而$\det(E\lambda-A)=f(\lambda)$为$A$的特征多项式，故$\varphi(\lambda)=g(\lambda)f(\lambda)$。因$f(\lambda)$，$g(\lambda)\in R[\lambda]$，$R$可视为$M_n(R)$的子环，且含于$M_n(R)$的中心里，于是由引理$g(A)f(A)=\varphi(A)$，由Cayley—Hamilton定理，$f(A)=0$，所以$\varphi(A)=0$。

定理得证。

16. 关于实二次型的秩与符号差的求法

求实二次型（或实对称阵）的秩和符号差，通常采用非退化线性替换化二次型为规范形的方法。实际上，不化为规范形，而将它的矩阵化为“每行至多只含一个非零元”的矩阵就可解决问题。这是基于下面的定理

定理1 设A是一个实对称矩阵，A的每行至多只有一个非零元，则A的秩等于其非零元个数，符号差等于主对角线上正元素个数与负元素个数之差。

证明 对实对称矩阵的主对角线上方的非零元个数用数学归纳法。当它的主对角线上方没有非零元时，它是对角矩阵，结论显然成立。假设对主对角线上方含k（$k\geq 0$）个非零元的实对称矩阵，结论成立。现设A的主对角线上方含（$k+1$）个非零元，由于A的每行至多只有一个非零元，所以A的每列也至多只有一个非零元（因A是对称矩阵），因此，若A的第i行第j列处的元素为$a\neq 0$，其中$i<j$，对A施行下列行列同型成对的初等变换：将第j行和第j列的$\frac{1}{2}$倍分别加到第i行和第i列，再将第i行和第i列的(-1)倍分别加到第j行和第j列，则将A化为如下的矩阵B。第i列第j列处和第j行第i列处的元素均为0，第i行第i列和第j行第j列处的元素分别为a和$-a$，其余位置上的元素与矩阵A的相应位置上的元素相同。因此，B是一个实对称矩阵，B的每行至多只有一个非零元，B的主对角线上方含k个非零元，并且B的非零元个数与A的非零元个数相等，B的主对角线上正元

素个数与负元素个数之差等于A的主对角线上正元素个数与负元素个数之差。由归纳假设及A,B合同即知当A的主对角线上方含（$k+1$）个非零元时，结论自然成立。由数学归纳法，定理成立。

上述定理表明，将一个实对称矩阵用合同变换化为一个“每行至多只有一个非零元”的矩阵，就可简单算出它的秩和符号差。下面通过几个例子来说明这种方法在某些情形下是很方便的。

例1 求实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+6x_2x_3+2x_1x_3$的秩和符号差。

解 此二次型的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

将其2行、2列的（-1）倍分别加到3行、3列得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix},$$

再将1行、1列的（-3）倍分别加到3行、3列得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

因此，由定理1，原二次型的秩为3，符号差为-1。

例2　求实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$的秩和符号差。

解　此二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

将第1行、1列的(-1)倍分别加到3行、3列，再将3行、3列的(-1)倍分别加到5行、5列，…，如此继续下去，最后A化为

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}，若n为偶数；$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，若n为奇数。

据定理1，矩阵B的秩为n，符号差为0，矩阵C的秩为$n-1$，符号差为0。因此，当n为偶数时，原二次型的秩为n，符号差为0；当n为奇数时，原二次型的秩为$n-1$，符号差为0。

17. 求标准正交基的矩阵初等变换法

通常的Schmidt方法，使我们可以从欧氏空间R^n的任意一个基出发，求出一个正交基来，再单位化，求出一个标准正交基。下面给出一种运用矩阵初等变换，从欧氏空间R^n的任意一个基求标准正交基的方法，比较直接简单。

设$\alpha_i=(a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni})$，$i=1, 2, \cdots, n$。是$R^n$的任意一基，以$\alpha_i'$为列向量构成矩阵$A=(a_{ji})$，则$A'A$是一个$n$阶正定矩阵，必与单位矩阵$E$合同，即存在$n$阶可逆矩阵$Q$，使得

$$Q'(A'A)Q=E \qquad (1)$$

即

$$(Q'A')(AQ)=E \qquad (2)$$

(1)式说明，对矩阵$A'A$施行一系列的列初等变换（相应的初等矩阵的乘积为Q）及一系列的行初等变换（相应的初等矩阵的乘积为Q'）可变成单位矩阵。(2)式表明，AQ的列向量组是R^n的一个标准正交基。AQ可以通过对矩阵A施行与对矩阵$A'A$所施行的相同系列的列初等变换求出，而不必通过先求Q再与A相乘得到。

于是，得到求标准正交基的矩阵初等变换法：

$$\begin{pmatrix} A'A \\ \\ A \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对}A\text{施行列初等变换}]{\text{对}A'A\text{施行}{\text{行}\atop\text{列}}\text{初等变换}} \begin{pmatrix} E \\ \\ AQ \end{pmatrix}$$

AQ的列向量组即为所求。

例1 把$\alpha_1=(1,1,0,0)$，$\alpha_2=(1,0,1,0)$，$\alpha_3=(-1,0,0,1)$，$\alpha_4=(1,-1,-1,1)$变成单位正交的向量组。

解 令$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A'A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A'A \\ A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[\sqrt{2}\text{除第1行}]{\sqrt{2}\text{除第1列}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\text{第2行—第1行}\times\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{第3行—第1行}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}]{\substack{\text{第2列—第1列}\times\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{第3列—第1列}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

所以所求单位正交的向量组为

$$\beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0\right),$$

$$\beta_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ 0\right),$$

$$\beta_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{3}{\sqrt{12}}\right),$$

$$\beta_4=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),$$

需指出的是，$Q'A'=(AQ)'$的行向量组，正是AQ的列向量组，所以有求标准正交基的矩阵初等变换法的另一形式

$$\left(A'A \vdots A'\right) \xrightarrow[\text{对}A'\text{施行行初等变换}]{\text{对}A'A\text{施行}\substack{\text{行}\\\text{列}}\text{初等变换}} \left(E \vdots Q'A'\right)$$

$Q'A'$的行向量即为所求。下面的例做为练习

例2 在欧氏空间R^3中，对于基

$\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(0,1,2)$，

$\alpha_3=(2,0,3)$，

施行正交化方法，求出R^3的一个标准正交基。

如果需要求出Q，则由$Q=EQ$可知，对单位矩阵E施行同样的列初等变换得到Q，即

$$\begin{pmatrix} A'A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对}E\text{施行列初等变换}]{\text{对}A'A\text{施行}\substack{\text{行}\\\text{列}}\text{初等变换}} \begin{pmatrix} E \\ Q \end{pmatrix}$$

18. 酉空间中酉变换的几个充要条件

在现行线性代数或高等代数教材中，酉空间中的酉变换，一般都是在线性变换条件下加以定义的。下面我们给出在酉空间中变换在没有线性变换这一条件时是酉变换的几个充要条件。

定义 设V是酉空间，σ是V的一个线性变换，$\forall\xi,\eta\in V$，若

$$(\sigma(\xi),\ \sigma(\eta))=(\xi,\ \eta),$$

则称σ是V的一个酉变换。

即酉变换就是酉空间中保持向量内积不变的线性变换。

事实上，定义中σ是线性变换这一条件已属多余，对此我们有

定理1 设σ是酉空间V的一个变换，则σ是酉变换$\Longleftrightarrow$ $\forall \xi, \eta \in V$，有

$$(\sigma(\xi), (\sigma\eta)) = (\xi, \eta)$$

证明 必要性由酉变换的定义即得。对于充分性，只需证明σ是线性变换即可。

$\forall \xi, \eta \in V$，由于$(\sigma(\xi), \sigma(\eta)) = (\xi, \eta)$，则

$$\begin{aligned}
&(\sigma(\xi+\eta)-\sigma(\xi)-\sigma(\eta), \sigma(\xi+\eta)-\sigma(\xi)-\sigma(\eta))\\
=&(\sigma(\xi+\eta), \sigma(\xi+\eta))-(\sigma(\xi+\eta), \sigma(\xi))-(\sigma(\xi+\eta), \sigma(\eta))-(\sigma(\xi), \sigma(\xi+\eta))+(\sigma(\xi), \sigma(\xi))+(\sigma(\xi), \sigma(\eta))-(\sigma(\eta), \sigma(\xi+\eta))+(\sigma(\eta), \sigma(\xi))+(\sigma(\eta), \sigma(\eta))\\
=&(\xi+\eta, \xi+\eta)-(\xi+\eta, \xi)-(\xi+\eta, \eta)-(\xi, \xi+\eta)+(\xi, \xi)+(\xi, \eta)-(\eta, \xi+\eta)+(\eta, \xi)+(\eta, \eta)\\
=&(\xi+\eta, \xi+\eta)-(\xi+\eta, \xi+\eta(\xi, \xi+\eta)+(\xi, \xi+\eta)-(\eta, \xi+\eta)+(\xi, \xi+\eta)\\
=&0,
\end{aligned}$$

由此得$\sigma(\xi+\eta)-\sigma(\xi)-\sigma(\eta)=0$，即有

$\sigma(\xi+\eta)=\sigma(\xi)+\sigma(\eta)$.

$\forall a \in C$, $\forall \xi \in V$，由于

$(a(a\xi)-aa(\xi), a(a\xi)-aa(\xi)) = (a(a\xi), a(a\xi)) - (a(a\xi), aa(\xi)) - (aa(\xi), a(a\xi)) + (aa(\xi), aa(\xi)) = (a\xi, a\xi) - \bar{a}(a\xi, \xi) - a(\xi, a\xi) + a\bar{a}(\xi, \xi) = (a\xi, a\xi) - (a\xi, a\xi) - (a\xi, a\xi) + (a\xi, a\xi)$

$=0$，从而得

$$\sigma(a\xi)-a\sigma(\xi)=0，即有$$

$$\sigma(a\xi)=a\sigma(\xi)$$

于是σ是V的一个线性变换，因而是酉变换。

定理 1 表明，在酉空间中，保持内积的变换就是酉变换。

推论 设σ是酉空间V的一个变换，则σ是酉变换$\Longleftrightarrow\sigma$同时保持向量的长度以及二非零向量之间的夹角不变。

证明 必要性是显然的。对于充分性，由定理 1，只需证明σ保持内积不变即可。

$\forall\xi,\ \eta\in V$，若$\xi,\ \eta$中有一个为零向量，无妨设$\eta=0$则由σ保持长度不变知$|\sigma(\eta)|=|\sigma(0)|=|0|=0$，所以有$\sigma(0)=0$，故

$$(\sigma(\xi),\ \sigma(\eta))=(\sigma(\xi),\ \sigma(0))=(\sigma(\xi),\ 0)=0=(\xi,\ 0)=(\xi,\ \eta)。$$

若$\xi\neq0$，$\eta\neq0$，则由σ保持长度与夹角不变知

$$\frac{(\sigma(\xi)),\ \sigma(\eta))}{|\sigma(\xi)|\cdot|\sigma(\eta))|}=\frac{(\xi,\ \eta)}{|\xi|\cdot|\eta|},$$

由此得$(\sigma(\xi),\ \sigma(\eta))=(\xi,\ \eta)$。

所以，σ保持内积不变，从而σ是一酉变换。

定理2 设σ是酉空间V的一个变换，则σ是酉变换$\Longleftrightarrow$ 1°，$|\sigma(\xi)+\sigma(\eta)|=|\xi+\eta|$，$\forall\xi,\ \eta\in V$；2°，$\sigma(i\xi)=i\sigma(\xi)$，$\forall\xi\in V$，$i^2=-1$。

证明 必要性显然。下证充分性，由定理 1，只需证明σ保持向量的内积即可。

在1°中，令$\xi=\eta=0$，则$|2\sigma(0)|=|0|=0$，所以，$\sigma(0)=0$，若1°中令$\eta=0$，由$\sigma(0)=0$得$|\sigma(\xi)|=|\xi|$，即σ保持向量的长度不变，因此，$\forall\xi,\ \eta\in V$，由1°得

$$(\sigma(\xi)+\sigma(\eta),\ \sigma(\xi)+\sigma(\eta))=(\xi+\eta,\ \xi+\eta).$$

即
$$(\sigma(\xi),\ \sigma(\xi))+(\sigma(\xi),\sigma(\eta))+(\sigma(\eta),\sigma(\xi))+(\sigma(\eta),\ \sigma(\eta))$$
$$=(\xi,\ \xi)+(\xi,\ \eta)+(\eta,\ \xi)+(\eta,\ \eta).$$

由σ保向量长度得

$$(\sigma(\xi),\ \sigma(\eta))+(\sigma(\eta),\ \sigma(\xi))=(\xi,\ \eta)+(\eta,\ \xi) \tag{1}$$

并且

$$\overline{(\sigma(\xi),\ \sigma(\eta))}=(\sigma(\eta),\sigma(\xi)),\ \overline{(\xi,\ \eta)}=(\eta,\ \xi),$$

又由1°得$|\sigma(i\xi)+\sigma(\eta)|=|i\xi+\eta|$，即

$$(\sigma(i\xi)+\sigma(\eta),\ \sigma(i\xi)+\sigma(\eta))=(i\xi+\eta,\ i\xi+\eta),$$

且σ保向量长度，所以有

$$(\sigma(i\xi),\ \sigma(\eta))+(\sigma(\eta),\ \sigma(i\xi))=(i\xi,\ \eta)+(\eta,\ i\xi),$$

而

$$(i\xi,\ \eta)+(\eta,\ i\xi)=i(\xi,\ \eta)+\bar{i}(\eta,\ \xi)=[(\xi,\ \eta)-(\eta,\ \xi)]\,i.$$

由2°得

$$(\sigma(i\xi),\ \sigma(\eta))+(\sigma(\eta),\ \sigma(i\xi))=(i\sigma(\xi),\ \sigma(\eta))+(\sigma(\eta),\ i\sigma(\xi))=[(\sigma(\xi),\ \sigma(\eta))-(\sigma(\eta),\ \sigma(\xi))]\,i.$$

因此由

$$[(\sigma(\xi),\ \sigma(\eta))-(\sigma(\eta),\ \sigma(\xi))]\,i$$
$$=[(\xi,\ \eta)-(\eta,\ \xi)]\,i$$

得到

$$(\sigma(\xi),\ \sigma(\eta))-(\sigma(\eta),\ \sigma(\xi))$$
$$=(\xi,\ \eta)-(\eta,\ \xi). \qquad (2)$$

(1)+(2)得

$$2(\sigma(\xi),\ \sigma(\eta))=2(\xi,\ \eta),$$

即 $(\sigma(\xi),\ \sigma(\eta))=(\xi,\ \eta)$。

故σ保持内积不变，从而σ是酉变换。

定理3 设σ是酉空间V的一个变换，则σ是酉变换$\Longleftrightarrow$ 1°，$d(\sigma(\xi),\ \sigma(\eta))=d(\xi,\ \eta)$，$\forall\xi,\ \eta\in V$，2°，$\sigma(i\xi)=i\sigma(\xi)$，$\forall\xi\in V$，而$i^2=-1$。

证明 必要性显然。对于充分性，条件1°即就是 $|\sigma(\xi)-\sigma(\eta)|=|\xi-\eta|$，在条件2°中令$\xi=0$，即有$\sigma(0)=i\sigma(0)$，所以，$\sigma(0)=0$，这样由 $|\sigma(\xi)-\sigma(\eta)|=|\xi-\eta|$知$|\sigma(\xi)|=|\xi|$，即$\sigma$保长度不变。类似定理2的证明，可得$\sigma$也保持内积不变，从而$\sigma$是$V$的一个酉变换。

附录1 高等代数中的思想方法

在数学中，为了开发学生的智能，除了课本的理论知识外，我们还从认识论的角度总结了高等代数在思想方法上的特点。现简述如下：

1）一般性

在高等代数中，多是更一般地提问题和讨论问题。在这一点上，高等代数与中学代数有着本质的不同。

例如，在中学代数中只介绍了二元、三元一次方程组的解法，而且多半只考虑有唯一解的情况。而在高等代数中给出了含任意多个未知量、任意多个方程的线性方程组的解法。同时还讨论了一个线性方程组有解的充要条件。在有许多解的情况下，还刻划了解之间的关系，给出了解的结构定理。总之，在高等代数中，完整地、漂亮地解决了数域上线性方程组的理论问题。对于线性方程组解的存在问题、个数问题、结构问题以及计算和表达问题都给出了满意的回答。再例如，关于行列式，在中学代数中只介绍了二、三阶行列式的算法，而在高等代数中给出了n阶行列式的完整理论。关于多项式，在中学代数中，只讨论了三次三项式（主要的），而在高等代数中介绍了一般多项式理论（包括多元项式理论）。关于多项式因式分解，在中学代数中只介绍了一

些具体的分解方法，对于所谓“不能再分”、“分解是否唯一”等都没有进行讨论，而在高等代数中对于这些问题都给出了肯定，明确的说明和论证。

以下我们用符号A→B表示中学数学中某种知识内容A到高等代数中某种知识内容B的发展与升华：

某些特殊二元二次方程组的解法→二元高次方程组的解法（结式）

二、三维几何空间R^2，R^3→n维欧氏空间→n维向量空间

旋转、反射→第1、2类正交变换→线性交换

二次曲线曲面→n元二次型

二次曲线、曲面用正交变换化简→n维欧氏空间的主轴问题→二次型用可逆线性替换化简。如此等等。

正是在上述意义下，可以认为高等代数是中学代数的继续和提高。和中学代数相比。高等代数已是一个具有相当深度的理论学科。而中学代数只是一个数学科目。两者已有本质的区别。

2）整体性

为了把问题表述清楚，在高等代数中常常是着眼于从整体上提出问题和认识问题，着眼于运算性质的讨论。例如，在看待数时，常常不是研究每个个别的数如何如何，而是把某些数放在一起作为一个整体来考虑。例如，整数的全体，有理数的全体，实数的全体，复数的全体等等。并且我们知道，全体整数的集合对于数目的加减乘三种运算自封。全体有理数的集合、全体实数的集合、全体复数的集合对于数目的加减乘除（除数不得为零）四种运算自封等等。在高等代

数中，分别称这四个数集为整数环、有理数域、实数域和复数域。再例如，在讨论多项式时，常常不是讨论每个个别的多项式如何，而是把数域P上的所有多项式（或某些多项式）放在一起来考虑。并且数域P上所有多项式的集合$P[x]$对于多项式的加减乘三种运算自封。在教科书中称$P[x]$为数域P上的一元多项式环。在讨论线性变换、矩阵、对称变换、对称矩阵、正交变换、正交矩阵、酉变换、酉矩阵等等的时候情形也是一样。我们有数域P上向量空间V的所有线性变换的集合$V(V)$，数域P上所有n阶方阵的集合$M_n(P)$等等。并且在每个相应的集合中都有自己相应的运算，而且这些运算还满足某些特定的运算规则。比如在线性变换的集合$V(V)$中，可以施行加减法和乘法，也就是说，向量空间V的两个线性变换的和、差、积仍是V的线性变换。除了这三种运算外，还有P，$L(V)$到$V(V)$的作用乘法(亦称数量称法)，对于P中的每个数k和$V(V)$中的每个线性变换T，kT也是V的一个线性变换。同时这些运算还满足一系列的算律。

人们关于代数的观念大致有三种。一种：所谓代数就是用字母代数；一种：所谓代数就是解方程。而当今关于代数学的正确观念应该是：所谓代数就是各种代数结构的理论。现代代数学的研究对象不再以解方程为中心，而重点是研究各种各样的代数结构的代数性质以及它们的联系。所谓代数结构就是带有运算的集合。一般说来，这些运算还适合某些所希望的若干条件。在这样的意义之下可以认为，在高等代数中自始至终渗透着近世代数的思想和方法。因此可以说，在高等代数中，尽管题材是古老的，但是处理这些题材的观

点和方法还是比较新的。

3）范围性

在高等代数中，总是明确指出讨论问题的范围。数学问题总是和数的范围有关，同一个问题在不同范围内可能有不同的结果。例如方程$x^2-2=0$在有理数域中无解，在实数域中有解，解是$\pm\sqrt{2}$；方程$x^2+1=0$在实数域中无解，在复数域中有解，解是$\pm i$。再例如，多项式$f(x)=x^4+x^2-6$在有理数域上的分解是$f(x)=(x^2-2)(x^2+3)$；在实数域上的分解是$f(x)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}(x^2+3)$；在复数域上的分解是$f(x)=(x+\sqrt{2}2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)$。在高等代数中总是明确指出讨论是在哪个范围内进行的。这也正是在开卷之首即引入数环数域概念的理由所在。同时这样做也可以使讨论具有更大的普遍性和一般性。例如，在一个一般的数域中所得到的多项式理论、行列式理论、线性方程组理论、矩阵理论、线性空间理论、二次型理论等也适用于每个具体的数域。当然由于每个具体数域又有自已的特性，所以上述各种理论在每个具体数域中又常有某些特殊情况。

这种认识是符合辩证法的。人们在认识客观事物的过程中，总是要由特殊到一般，由一般再回到特殊。

4）抽象性

一般认为数学有三大特点：高度的抽象性、推理的严密性，应用的广泛性。高等代数作为数学系学生的一门基础课，尽管它的理论对象比较具体，如方程组、行列式、多项式矩阵、二次型等，但其中的有些概念和方法也还是比较抽象的。这也正是学生学习这门课程感到困难的原因之一。例

如，向量空间就是一个相当抽象的概念。人们在认识并研究了各种具体的空间之后，把它们的共同性质抽象概括出来，便形成了数域P上抽象向量空间的概念。在一个抽象的向量空间V中，其中的向量就是α，β，γ等符号，它们已经完全失去了有向线段的意义。V中的加法就是（V，V）到V的一个映射。同样，（P，V）到V的作用乘法是(P,V)到V的一个映射。只有在具体举例时（即在具体的空间中）才知道V中的向量是什么，运算如何施行。比如在空间P（X）中，向量是多项式，向量相加即多项式相加。用P中的数k乘多项式f（x）即是用k遍乘f（x）的各项系数。再比如，在空间M_n（P）中，向量是数域P上的n阶方阵，向量加法是方阵的加法，作用乘法是数与矩阵的乘法，等等。在这里不仅概念是抽象的，方法也是抽象的。例如，在由抽象向量空间的定义推出向量空间的其它性质时，所能依据的只有定义中的基本概念和几条基本性质（公理），而不能凭借任何具体直观的模型。关于向量空间中的线性相关理论和欧氏空间、酉空间的理论等情形也是一样。

在教科书中，还有一个概念是相当抽象的。这就是向量空间的同构。客观中的具体空间多种多样，试问什么样的两个向量空间才算是本质上相同的？为了比较向量空间，人们引入了同构的概念。如果仅从运算的角度考虑，可以认为两个同构的向量空间在本质上是一样的。它们的区别仅在于符号不同，名称不同而已。进一步我们还知道，两个有限维向量空间同构当且仅当它们有相同的维数。因此有限维向量空间可以用维数来分类。抽象地看n维空间只有一个，并且在数域P上的所有n维向量空间中，由n元数组（$x_1,\cdots,x_n$）

所组成的空间P_n可以取作最典型的代表。

应该指出的是，这种抽象的意义是很伟大的。没有抽象就没有思维，没有抽象就没有科学。科学的抽象总是更正确、更本质、更深刻地反映着自然。

20世纪数学的显著特点之一就是公理化的方法。上述的例子正是这种方法的一种具体的体现。正是在这个意义下，可以这样说，数学系学生接受现代数学的思想和方法首先是在高等代数中，高等代数作为一门基础课，不仅它的知识是重要的，而且还有它的方法论的意义。

5）形式表现方法

规律是客观的，但如没有一定的形式，规律也是表现不出来的。形式的变化常常包含着质的差异性。由事物的一种形式到另一种形式的转变，有时会把人们的认识引向更深刻的阶段。在高等代数中，事物形式的变化起着重要的作用。

例1　把某种代数式表成一个行列式，看来虽然只是形式上的变化，但是正是这种变化使我们得到了克莱姆规则。如果没有行列式，克莱姆规则所反映的规律恐怕是无法被人们掌握的。一种规律总要通过一种好的形式才能清楚地反映出来。

例2　关于线性方程组解的表达。设有线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0 \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3 \end{cases} \qquad (1)$$

用消去法解之，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是得

$$\begin{cases} x_2 = 2 - 5x_1 + x_3 + x_4 \\ x_5 = -1 + 3x_1 \end{cases} \qquad (2)$$

其中x_1，x_3，x_4是自由未知量。这就是原方程组解的一般表达式。

至此解方程组（1）的工作似乎已经结束，但是为了看得更清楚，我们还可以对（2）做如下处理：在（2）中令自由未知量$x_1 = t_1$，$x_3 = t_3$，$x_4 = t_4$，则（1）之解为

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = 2 - 5t_1 + t_3 + t_4 \\ x_3 = t_3 \\ x_4 = t_4 \\ x_5 = -1 + 3t_1 \end{cases} \qquad (3)$$

其中t_1，t_3，t_4可取任何值，把（3）写成向量等式，又有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_4 \qquad (4)$$

这就是(1)的解的表达式。

由（2）到（4）虽然看来只是形式上的变化，但是这种变化却能使我们的认识更加清楚。由（4）容易看出：

1^{0}（4）式右端的第1个列向量是原方程组（1）的一个固定解，这只需取$t_1=t_3=t_4=0$。

2^{0}（4）式右端的其余三个列向量是原方程组的导出组的一个基础解系（这与用通常方法求得的基础解系完全一样）。

3^{0}把原方程组的一个固定解加到导出组的每一个解上去，即得原方程组的所有解（解的结构定理）。

此外，通过用消去法解方程组我们还能进一步体察到：

4^{0}一个齐次方程组，当方程个数小于未知量个数时，一定有非零解。

一个齐次方程组的基础解系所含向量的个数等于$n-r$，即等于自由未知量的个数，这里n是未知量的个数，r是系数矩阵的秩。

5^{0}一个方程组有解的充要条件是它的系数矩阵的秩与

增广矩阵的秩相等（有解判别定理）。

6.[0]若秩（A）= 秩（$\overline{A}$）= r，当$r=n$时方程组有唯一解；当$r<n$时，方程组有许多解（解的个数定理）。这里A，$\overline{A}$分别是给定方程组的系数矩阵和增广矩阵，n是未知量的个数。

例3　线性方程组的解和表现形式。

给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \quad (5)$$

利用矩阵乘法可表成

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \quad (6)$$

或

$$(x_1 \cdots x_n)A' = (b_1 \cdots b_s) \quad (7)$$

其中A是（5）的系数矩阵，A'是A的转置矩阵。

（5）还可表成

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \quad (8)$$

或 $$(a_{11},\cdots,a_{s1})x_1+(a_{12},\cdots,a_{s2})x_2+\cdots+(a_{1n},\cdots,a_{sn})x_n=(b_1,\cdots,b_s) \quad (9)$$

这些形式的变化绝不是无聊的符号游戏。每一种形式都可能给我们带来某种方便。

例如，利用表法（8）很容易证明：（5）有解当且仅当秩(A)=秩$(\overline{A})$。

实际上，若记

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \| & \quad & \| & \quad & \| & \quad & \| \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_n & & \beta \end{matrix}$$

则（5）有解$\Longleftrightarrow\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示$\Longleftrightarrow$向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与向量组$\alpha_1\cdots,\alpha_n,\beta$等价$\Longleftrightarrow$秩$(A)$ = 秩$(\overline{A})$。

再例如，利用表法（6）很容易的看出要解矩阵方程

$$AX=B$$

其中$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$X=(x_{ij})_{n\times s}$ $B=(b_{ij})_{m\times s}$。只要解S个线性方程组

$$A\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}, \quad j=1,2,\cdots,s$$

而这些方程组的系数矩阵都一样，所以这S个方程组可同时解出。

以上的讨论还表明，若

$$AB=C$$

则C的每个列向量都是A的列向量的线性组合；C的每个行向量都是B的行向量的线性组合、具体地说，C的第j列为A的各列的线性组合，其组合系数恰是B的第j列；C的第i行作为B的各行的线性组合，其组合系数是A的第i行。由此立得

$$秩(C)\leq 秩(A)，秩(B)。$$

即积的秩小于等于每个因子的秩。

类似的例子还可以举出很多。

6）几何方法与代数方法交互为用

我们知道，当在（数域P上的）n维空间V中取定一组基之后，V中的向量与其坐标——n元数组1—1对应，V的线性变换与数域P上的n阶方阵1—1对应，并且这种1—1对应还保持运算。因此，在线性代数中，我们总是通过矩阵来了解线性变换。一般总是把线性变换问题转换成矩阵问题来处理。把矩阵看作是线性变换的表现（表示），把线性变换看作是矩阵的几何解释（原型）。所谓线性代数，用几何语言来说，主要的就是关于线性变换的理论；用代数语言来说，主要的就是关于矩阵的理论（当然线性代数也还研究线性函数等。既使在这些函数的研究中，矩阵也扮演着十分重要的角色）。

但是另一方面，必须注意，由于V的所有线性变换集合$L(V)$的代数结构与P上所有n阶方阵集合$M_n(P)$的代数结构完全一样（这两个代数结构同构），所以$M_n(P)$中

的每个命题也都可以平行地转移到$L(V)$中。并且反过来也是一样。

例如，若V的两个线性变换σ，τ在取定基下的矩阵分别是A，B。则当$\sigma\tau=\tau\sigma$时也有$AB=BA$。

例如，若$P[X]$中的多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_n$$

能够零化方阵A，则$f(x)$也能零化线性变换σ

$$f(\sigma)=a_0\sigma^n+a_1\sigma^{n-1}+\cdots+a_nE=0$$

$$f(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots a_nE=0$$

因此对于线性变换也有汉密尔顿凯莱定理。

再例如，设V是n维复空间，则对于V的每个线性变换σ，必可找到V的一组基，使A在此基之下的矩阵是若当矩阵，用矩阵语言，此结果又可表述成：每个n阶复方阵都相似于一个若当矩阵，等等。

对于线性变换的研究，有的书偏重于代数方法即矩阵方法，也有的书偏重于几何方法，两者各有利弊。有些问题用线性变换语言表述来得方便，有些问题用矩阵语言表述来得方便。但在一般情况下，总是两种方法交互为用。

7）分类与找出标准形

在高等代数中，我们曾经讲过的有$m\times n$数字矩阵（数域P上的矩阵）的等价分类，λ一矩阵的等价分类，复矩阵的相似分类，实对称矩阵的合同分类，正交相似分类，厄米特矩阵的酉相似分类等等。

前面曾经提到，所谓线性代数，用代数语言来说，主要的就是矩阵的标准形理论。所谓矩阵理论，主要的就是矩阵的标准形理论。

当然，这里所谈的每一种标准形理论都紧密联系着它们的几何背景。例如，实对称矩阵正交相似于对角形矩阵（对角线上的元恰是给定对称矩阵的全部特征根）与实二次型可经正交线性替换化成平方和是一回事；研究复矩阵在相似关系下的标准形与研究复空间的线性变换在某基之下的标准形是一回事。等等。

（8）研究变化中不变因素，找出全系不变量

为了得到某种矩阵在某种给定等价关系下的标准形，关键在于找出这种矩阵在给定等价关系下的全系不变量。

例如，我们曾经证明，两个实对称矩阵合同当且仅当它们有相同的秩和正惯性指数。因此实对称矩阵的秩和正惯性指数即是实对称矩阵在合同关系下的全系不变量，于是若实对称矩阵A的秩为r，正惯性指数为p，则A合同于对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \}P\text{个} \\ \}r\text{个} \end{matrix}$$

换句话说，若实二次型$f(x_1, \cdots, x_n)$的秩是r，正惯性指数为p，则f可经非退化的线性替换化成平方和

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

完全类似地，因为：

两数字矩阵等价当且仅当它们有相同的秩；

两λ一矩阵等价当且仅当它们有相同的秩和相同的不变因子（初等因子、行列式因子）；

两实对称矩阵正交相似当且仅当它们有完全相同的特征根；

两复矩阵相似当且仅当它们有相同的不变因子（初等因子、行列式因子）；

所以数字矩阵的秩是数字矩阵在等价关系下的全系不变量；λ一矩阵的秩和不变因子（初等因子、行列式因子）是λ一矩阵在等价关系下的全系不变量；实对称矩阵的特征根是实对称矩阵在正交相似关系下的全系不变量；复矩阵的不变因子（初等因子、行列式因子）是复矩阵在相似关系下的全系不变量，如此等等。

值得注意的是，找出全系不变量和标准形这两者是相辅相成的。一般这两者总是同时被得到，但也有时是先得到前者或者反过来。

再例如，当V的基改变时，$L(V)$中同一个线性变换所对应的矩阵一般也随之改变。但是，$L(V)$中同一个线性变换在不同基下的矩阵彼此相似。确切地说，在V中的基允许改变的情况下，$L(V)$中每个线性变换都对应着一个相似矩阵的类。因此，相似矩阵的共性就是线性变换本身的固有属性。我们曾经证明：相似矩阵有相同的特征多项式和最小多项式，因而有相同的特征根，相同的迹和相同的行列式；相似矩阵有相同的不变因子和初等因子等等。所有这些概念都可以引到线性变换上去。

设线性变换σ在某基之下的矩阵是A，我们把A的特征多

项式、最小多项式、特征根、迹、行列式、不变因子、初等因子也分别叫做σ的特征多项式、最小多项式、特征根、迹、行列式、不变因子和初等因子。

综上所述，可以说在高等代数的研究中，充满了唯物辩证法，诸如一般与特殊、共性与个性、抽象与具体、整体与部分、变与不变、比较与分类等辩证统一关系在书中都有具体的模型和体现。因此，如教师在教学中能够自觉地、有意识地去引导学生掌握这些方法，不仅会使学生更好地理解知识，提高能力，而且对于培养学生的辩证唯物主义科学世界观也肯定有裨益。

（本文作者：辽宁师范大学数学系邱岫岩、董学东）

附录2 线性代数简史

早期代数学的中心课题是解方程问题。就方程本身而言，它是向两个方向发展的，一个方向是一元高次方程，一个方向是多元一次方程组与高次联立方程。前者的发展形成了后来的方程论（或多项式论）的研究，到了19世纪，还诱发了近世代数学的出现；后者的发展形成了线性代数学，它的中心内容是行列式与线性方程组理论、矩阵的理论及线性空间线性变换的理论等。

线性代数学的兴起与发展，大致与微积分学的兴起与发展是同时的，它们都随着十七、十八世纪生产和科学技术的发展与要求而发展的。

“线性”一词，源于解析几何中平面笛卡尔坐标系下的一次方程是直线方程，后来凡是一次的均称为线性的，这一称呼今天已深入到了科学技术的很多领域。

一般论述线性代数学的发展时，是从行列式的出现开始的。西方数学史家认为，首先提出行列式概念的是著名德国数学家莱布尼兹（*Leibniz*）

1693年，莱布尼兹在他写给洛必达（*L'Hos——Pital*）的信中，推导了三条相异直线

$$1_0+1_1x+1_2y=0$$

$$2_0+2_1x+2_1y=0$$

$$3_0+3_1x+3_2y=0$$

共点的必要条件是

$$1_0\cdot 2_1\cdot 3_2+1_1\cdot 2_2\cdot 3_0+1_2\cdot 2_0\cdot 3_1=$$

$$1_0\cdot 2_2\cdot 3_1+1_1\cdot 2_0\cdot 3_2+1_2\cdot 2_1\cdot 3,$$

后来称此为结式，用符号a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3、c_1、c_2、c_3等表示为

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2$$

$$-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1=0,$$

认为这是行列式的最初起源。

但据日本数学家的考证，17世纪的日本数学家关孝和在1683年所著《解伏题之法》一书，实际上对行列式书中的概念和它的展开，已经有了清楚叙述，其时间比莱布尼兹要早。关孝和是一位有成就的日本古代数学家，他很熟悉古算。一些数学史家认为，在独立发现行列式方面，关孝和思想的产生，多半是受惠于中国的而非西方的影响。人们特别提到中国古代从《九章算术》中的"方程术"开始，就实际上是应用矩阵的初等变换解线性方程组了。方程术可能对行列式概念的产生提供启示，而且它的演算实际上已经提供了今天计算行列式时，将一行（列）的若干倍加于另（一行列）这一常用的方法(下面讨论矩阵的历史时，还将谈到)。

莱布尼兹后，还有马克劳林（*Maclaurin*）也从事过这方面的工作。到了1750年，瑞士数学家克莱姆（*Cramer*）在他的《线性代数分析导言》一书中，给出了用行列式解线性方程组的方法，这就是后来称为的*Cramer*法则。那时

行列式的定义中，判断每一项是带正号或负号的手续比今天要复杂些，但定义的实质已经与今天相仿了。

首先将行列式的理论脱离开线性方程组，进行独立研究的是范德蒙（*Vandermonde*），时间是1772年。范德蒙还研究了用行列式的二阶子式及其代数余子式来展开行列式，这一工作当时被拉普拉斯（*Laplace*）推进到按k行的一切可能的子式及其代数余子式之积之和展开行列式，这一方法后来称为拉普拉斯定理。

行列式（*Determinant*）这一名称是著名法国数学家柯西（*Cauchy*）于1812年首先使用的。柯西还在1815年的文章中首先使用以a_{ij}等带双重脚标的字母来表示行列式的元，这篇文章中论述的关于行列式的乘法（即行列式行乘列的办法）对后来矩阵的运算有很大的影响。

在行列式理论的形成与发展过程中作出过重大贡献的数学家还有裴蜀（*Bezout*）、拉格朗日（*Larange*）、高斯（*Gauss*）、维尔斯特拉斯（*Weierstrass*）、西勒维斯特（*Sylvester*）和凯莱（*Cayley*）等人。例如，正定的二次型的充要条件是它的行列式的各阶主子式为正，就是西勒维斯特的工作，他还推出了加边行列式的西勒维斯特恒等式。行列式的两条竖线，是由凯莱在1841年引进的。

1841年，德国数学家雅可比（*Jacobi*）著名论文《论行列式的形成与性质》，标志着行列式系统理论的建成。这之后，在行列式的理论与应用发展的同时，矩阵的理论以及与之相联系的线性空间线性变换的理论蓬勃地发展起来了。

在行列式的系统理论形成的同时，n维空间的概念也在

形成。早在18世纪后半叶，著名数学家欧拉（*Euler*），拉格朗日和达朗贝尔（*D'Alembert*）都直接或间接地提到过四维或n维空间的概念。18世纪末，拉格朗日在研究二次型化为标准形时，引入了n个变量（x_1，x_2，…，x_n）的二次型。1844、1845年及1847年，格拉斯曼（*Grassmann*）与柯西等数学家分别提出了脱离了一切空间直观的、成为一个纯粹数学概念的n维空间概念。在此之前，英国数学家哈米尔顿（*Hamilton*）于1843年发现了四元数$a+bi+cj+dk$，他想由此出发对向量作进一步研究。由于格拉斯曼与哈米尔顿等的工作，同时也由于19世纪中叶以后，近世代数学的发展，促进了n维向量空间理论，线性变换理论与矩阵理论的研究。

矩阵(*Matrix*)这个词是西勒维斯特在1850年首先使用的。在此之前，1849凯莱已经介绍了可逆方阵对乘法成群，19世纪初已经出现了应用初等变换解方程组的著名的高斯消元法。在中国，这方面的历史可追溯到东汉初年（公元一世纪）成书的《九章算术》。《九章算术》第八算的题目是"方程"，所谓"方程"并不是"*Equation*"，而是"矩阵"。《九章算术》中说的"方程术"（兼用"正负术"下同）中的内容就是对"方程"（即矩阵）施行"偏乘"及"直除"两种运算。"偏乘"的实质就是以一个不为0的数同乘一行，"直除"的实质就是将某一行的同一倍数加到另一行，也就是今天说的矩阵的初等变换（初等变换中的对调两行是可以通过"偏乘"与"直除"来实现的）。

例如，《九章算术》方程章的第一题："今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三

秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。向上、中、下禾一秉各几何？”就是布出“方程”（即写出矩阵）

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

后，通过一系列的偏乘、直除（即初等变换）化为

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

于是得下禾一秉实$\frac{99}{39}$即$2\frac{3}{4}$斗，之后依次求得中禾一秉实$4\frac{1}{4}$斗，上禾一秉实$9\frac{1}{4}$斗的。公元263年，三国时的刘徽注《九章算术》时，特别说明可以继续使用偏乘、直除之法，直到算出结果。那就是

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \\ \frac{11}{4} & \frac{17}{4} & \frac{37}{4} \end{array}$$

刘徽还特别对《九章算术》中的“方程”加以说明，“此都术也，以空言难晓，故特系之以禾以决之。”意思是，这是一种普通方法，由于抽象地说难以说清楚，故联系到禾的例子来决定它。《九章算术》方程章的18个题都是按照这种“方程术”来处理的，其中第13题与第18题都涉及到5个未知数（第13题“五家共井”还是一个不定方程）。人们清楚地看到，“方程术”就是今天线性代数学中的“高斯消元法”我国在这面的成就要比欧洲早1500年至1800年。后来，我国元代数学家朱世杰于1303年刊行的《四元玉鉴》中，也运用了矩阵。

在欧洲，由于有行列式的成果作为基础，1850年前后，矩阵理论的发展是非常迅速的，初期的功绩应归功于两位长期合作的英国数学家——剑桥大学教授凯莱和西勒维斯特。其中特别是凯莱，矩阵的很多开创性工作是他作的。例如，由两个相继的线性变换引入矩阵的乘法，矩阵的乘法的性质，逆矩阵的求法与性质，转置矩阵的性质等等。凯莱还把行列式中已有的一些工作转入矩阵，如特征方程特征根

等，此外如著名的哈米尔顿——凯莱定理的发现等，也都浸透了凯莱的劳动，其中很大一部分成果是他在1855——1958年间完成的。

现今的矩阵论的很多结果是在19世纪的下半叶取得的。在19世纪50年代与60年代，还证明了复数矩阵中埃尔米特（*Hermite*）矩阵的特征根都是实数，以及实对矩阵及其有关二次型的结果。这一时期还引入了相似矩阵的概念，它可溯源于柯西在行列式理论中的一些工作。

一些数学史家认为维尔斯特拉斯在行列式论方面的工作，如关于二次型的理论，不变因式与初等因式方面的工作等，实际上为矩阵论在这方面的某些工作打下了基础。

在19世纪七、八十年代，德国数学家弗洛本纽斯（*Frobenius*）为阵矩论的发展做了大量的工作。他在1878年普遍地证明了哈米尔顿——凯莱定理，并提出了最小多项式的概念，在1879年引入了矩阵的秩的概念，正交矩阵的定义是他给出的；他还证明了$(A^{-1})'=(A')^{-1}$等公式，此外他还在初等因式与不变因式方面做了许多工作。

1870年，法国数学家约当（*Jordan*）用相似矩阵和特征方程的概念，证明了矩阵可以化为标准形，这就是今天说的约当标准形。

在19世纪下半叶，对行列式论与矩阵论的发展作出重要贡献的还有克隆尼克（*Kronecker*）、道奇森（*Dodgson*）、阿达玛（*Hadamard*）、克莱伯施（*Clebsch*）、布克海姆（*Buchheim*）、泰伯（*Taber*）、亨泽尔（*Hensel*）史密斯（*Smith*）和梅茨勒（*Metzler*）等数学家。

1892年，梅茨勒引进了矩阵的超越函数，对e^A、$\log A$

$\sin A$、$\sin^{-1}A$等建立了级数，矩阵论从矩数阵代数走向矩阵分析。

进入20世纪以后，矩阵的理论，线性代数及其应用，线性代数计算方法等又有了长足的发展，其中，我国数学家华罗庚教授也作了很多工作。线性代数的理论及其应用远远超出了数学的范围，它是物理学，力学及与电气相关的工程技术学科的主要数学工具之一和一般工程技术的常用数学工具，今天，甚至像生物学，医学等过去运用数学知识较少的学科都有线性代数的应用。线性代数学已经成为科学技术工作者的必备知识，线性代数课已经成为大专院校学生的必修课，不少国家在中学阶段就开始教授线性代数的基础知识了。

线性代数及其应用、矩阵论仍在继续发展中。

（本文作者：清华大学应用数学系李文汉副教授）

参 考 文 献

〔1〕张禾瑞、赫炳新，《高等代数》（第三版），高等教育出版社，1983年9月。

〔2〕北大编，《高等代数》(第二版)，高等教育出版社，1989年1月。

〔3〕钱吉林、李照海，《矩阵及其广义逆》，华中师范大学出版社（武昌），1988年。

〔4〕任耀文等编，《高等代数简明教程》，兰州大学出版社，1990年1月。

〔5〕岳振才，多项式整除的矩阵判定，《汉中师院学报》（自），1986年1期。

〔6〕蒋忠樟，多项式最大因式的矩阵求法，《数学通报》，1989年6期，23—24。

〔7〕谢建勇，求一元多项式最大公因式的矩阵方法，《宁夏教育学院及银川师专学报》（自），1990年1期，22—29。

〔8〕张群，关于*Eisenstein*判别法的一点注记，《数学通报》，1984年10期，23。

〔9〕郑格于，*Eisenstein*判别法的应用，《数学通报》，1988年2期，37—41。

〔10〕王尊全，“*Eisenstein*判别法的应用”一文的注记，《数学通报》，1990年9期，32—33。

〔11〕张鸿图，“*Eisenstein*判别法的应用（2）”一文的注记，《聊城师院学报）（自），1991年3期，27—29.

〔12〕马跃超，整系数不可约多项式的两个判别法，《数学通报》，1988年6期，20—21.

〔13〕张小红、任耀文，整系数多项式不可约性的新判别法，《咸阳师专学报》(自)，1990年1期，10—12.

〔14〕李克亚，“代数基本定理”的一个初等证明，《数学通报》，1980年3月.

〔15〕杨子胥，*Cramer*法则的推广，《数学通报》，1988年4期，29—30.

〔16〕杨子胥，关于*Cramer*法则和线性方程组基本定理，《数学通报》，1986年9期，32—35.

〔17〕向大晶，关于*Cramer*法则的证明，《数学通报》，1988年12期.

〔18〕肖振纲，利用*Crame*法则求行列式的值，《数学通报》，1991年6期，35—38.

〔19〕张益敏，线性方程组的同解变换与初等变换，《数学通报》，1985年8期，38—40.

〔20〕周后型，矩阵秩的一个定理和线性方程组的同解定理，《数学通报》，1991年.

〔21〕钟育彬，关于线性方程组的进一步讨论，《数学通报》，1987年6期，35—37.

〔22〕包桐桢，利用矩阵的列初等变换解线性方程组，《数学通报》，1991年.

〔23〕李庆淮，关于非齐次线性方程组的解的结构，

《数学通报》1990年3期，30—31.

〔24〕罗党，关于线性非齐次微分方程组解的结构，《驻马店师专学报》，（自），1991年3期，16—19.

〔25〕杨子胥，用分块矩阵证明矩阵秩的一些性质，《数学通报》，1985年3期，40—41.

〔26〕姚存峰，利用四分块矩阵求n阶行列式的值，《数学通报》，1987年10期，40—43.

〔27〕曹庆刚，用分块矩阵求合同与求逆，《数学通报》，1990年10期，28—32.

〔28〕李天林，循环矩阵的几个性质，《数学通报》，1982年2期，30—33.

〔29〕高殿伟，广义循环矩阵，《辽宁师大学报》（自），1988年2期，7—11.

〔30〕方献亚，正定实对称矩阵的几个不等式，《数学通报》，1985年3期，31—32.

〔31〕吴忠民，$|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}$的一个证明，《数学通报》，1987年7期，39—40.

〔32〕吴爱军，$|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|+|B|^{\frac{1}{n}}$的一个证明，《数学通报》，1989年7期，18—19.

〔33〕唐立华，$|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}$的

一个加强《数学通报》，1990年8期，36—38.

〔34〕方光玉，关于矩阵追迹的一些不等式，《湖南数学通讯》，1985年2期，26—27.

〔35〕钱吉林，关于*Bellman*不等式的注记，《华中师大学报》（自）1986年4期，418—424.

〔36〕龙永红，*Bellman*不等式的推广及*Bellman*的一个猜想，《华中师大学报》(自)，1991年1期，8—12.

〔37〕章秋明，关于行初等变换的定理及其应用，《数学通报》，1987年10期，43—45.

〔38〕章秋明，关于行初等变换定理的应用，《数学通报》，1991年2期，32—35.

〔39〕章秋明，从行初等变换定理推出的两个新结论，《新疆大学学报》（自），1989年4期，109—110.

〔40〕张小红，线性空间的一个等价定义，《汉中师院学报》（自），1989年1期，77—79.

〔41〕陈世樵，子空间的交的基与维数的一种确定方法，《数学通报》，1987年11期，37—40.

〔42〕李家俊，陈利国，余子空间的性质，《徐州师院学报》（自），1989年1期，73—77.

〔43〕王卿文，关于知核求相应的线性变换问题，《数学通报》，1991年8期，28—30.

〔44〕李群，浅淡公式$rkAB=rkB-dim(R(B)\cap N(A))$的应用，《数学通报》，1991年.

〔45〕胡跃进，公式$dimIm(\sigma)+dimker(\sigma)=dimV$在解题中的应用，《徽州师专学报》（自），1991

年1期。

〔46〕张定夫，若当标准形问题的一个初等解法，《数学通报》，1959年7期，26—29。

〔47〕席光明，避开求初等因子化矩阵为若当形，《零陵师专学报》（自），1991年3期，51—53。

〔48〕*Richard A Brualdi*（郑高峰泽），若当标准形——一个老的证明，《数学通报》，1991年6期，43—46。

〔49〕寇福来，欧氏空间的变换是正交变换的条件，《数学通报》，1990年12期，34—35。

〔50〕王琳，用正交变换化实二次型为标准形方法研究，《数学通报》，1990年3期，31—33。

〔51〕张秦岭，李亚奎，替换定理的又一种证明，《庆阳师专学报》（自），1989年1期，120—121。

〔52〕王尊全，多元多项式互素的充要条件，《数学通报》，1991年5期，33—35。

〔53〕王炳安，计算结式的一种方法，《数学通报》，1985年12期，41—44。

〔54〕张小红，行列式按行按列展开式的证明，《教材通讯》，1990年6期，36。

〔55〕李超，行列式两个性质的推广，《湖南数学通讯》，1984年4期，27—28。

〔56〕郑树民，“行列式两个性质的推广”一文证明的改进，《湖南数学通讯》。

〔57〕蒋省吾，“杨辉三角”中的行列式，《数学通报》，1988年5期，16—17。

〔58〕张容万，矩阵初等变换及其逆阵，《数学通报》1991年4期。

〔59〕张树清，分块矩阵的准消法变换及其应用，《烟台师范学院学报》（自），1991年1期，72—76

〔60〕陈汉藻，矩阵可对角化的一个充要条件，《数学通报》，1990年2期，30—31。

〔61〕髙吉全，矩阵的特征根与特征向量的同步解法探讨，《数学通报》，1991年12期，34—37。

〔62〕周士藩，矩阵化为标准形的一个定理的应用，《枣庄师专学报》（自），1991年2期。

〔63〕李师正，*Cayley—Hamilton*定理的推广，《烟台师院学报》（自），1991年1期，70—71。

〔63〕徐邦腾，一类实二次型的秩和符号差的简单求法，《数学通报》，1991年9期，34—35。

〔65〕翟铁倪，求标准正交基的矩阵初等变换法，《教材通讯》，1992年1期，39—41。

〔66〕陈琳，酉空间中酉变换的几个充要条件，《驻马店师专学报》（自），1991年3期，19—21。

〔67〕邱岫岩，董学东，高等代数中的思想方法，《辽宁师大学报》（自），1991年4期。

〔68〕李文汉，线性代数学简史，《数学通报》，1985年8期，35—37。

〔69〕佟文廷，广义正定矩阵，《数学学报》1984年第6期。

〔70〕夏长富，矩阵正定性的进一步推广，《数学研究与评论》，1988年第4期。 0